



Mémoire

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER en PHYSIQUE

Spécialité : Physique des Rayonnements.

Option : Science Nucléaire et Interactions Ions - Matière.

Par : **Wassila DALI ALI**

Sur le sujet :



Sera soutenue publiquement le : 07/07/2007

devant le jury composé de :

S. OUICHAOUI	Professeur (USTHB)	Président du jury.
T. ABDELATIF	Directeur de recherche (CRAAG)	Directeur de thèse.
J. BOURGNINO	Professeur émérite (Université de NICE)	Examineur.
A. MEZAOUI	Maître de conférence (USTHB)	Examineur.
A. IRBAH	Directeur de recherche (CNRS, Paris)	Examineur.

Dédicace :

*À toi chère maman,
Et à mon cher papa,*



*À mes frères et sœurs,
À la personne qui m'a aidé à reprendre confiance en moi...*

À toutes les personnes qui m'ont apporté leurs aides et leurs encouragements.

Je dédie cette thèse.

Remerciements

« C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons. »

Henri Poincaré.

Je voudrai remercier Monsieur Abdelatif Toufik El Hak qui a accepté de diriger ce travail.

Un grand merci à Mokrane pour son assistance continue, son aide et la patience dont il a fait preuve pour m'éclairer sur pas mal d'aspects, tout le long de ce travail.

Je remercie le Professeur Julien Borgnino, pour ces valeureux conseils qui m'ont beaucoup servi et, malgré son emploi du temps très chargé a eu la gentillesse d'examiner ce travail. J'aimerais le remercier aussi pour le bon accueil qui m'a été réservé lors de mon séjour scientifique à l'université de Nice.

De même je remercie Monsieur Irbah docteur au CNRS (Paris) pour son appui, ses conseils et d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je voudrai remercier Monsieur Mezaoui qui a, gentiment, accepté d'être membre du jury.

Je remercie Monsieur Ouichaoui qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et pour tous ses encouragements.

Je remercie infiniment ma mère et mon père pour leur compréhension et leur encouragement à poursuivre toujours MON chemin même si cela m'éloigne d'eux.

Merci à mes sœurs et mes frères qui m'ont toujours soutenu en particulier Nawel et Yazid.

Un grand merci à mes grands parents ainsi que mes tantes qui m'ont encouragé et ouvert leur maison durant mes études supérieures.

Merci à mes chers cousines et cousins surtout ma petite princesse Lydia.

À mes deux professeurs de physique (au CEM et au lycée) qui m'ont transmis cette passion pour la physique et l'observation de la nature.

À tous mes amis je dis merci d'être toujours là pour m'aider en particulier Fadia.

Merci à mes collègues de travail au CRAAG particulièrement : Hadjara Massinissa qui m'a souvent aidé pour bien avancer dans ce travail ainsi que Madame Benchligham Salima.

Je remercie aussi tous les doctorants et astronomes du LUAN à l'université de Nice ainsi que tous les responsables à l'Observatoire de la Côte d'Azur, pour leur sympathie et leur gentillesse durant mon stage.

Et pour finir je dis merci à notre mère « LA NATURE », qui ne cesse de révéler ses secrets, aussi mystérieux qu'ils le soient, à ceux qui savent l'observer et l'admirer !

À vous tous

Je dis merci du fond du cœur.

Table des matières :

Chapitre 1 : Introduction à l'optique atmosphérique.

1.1. Introduction générale.....	3
1.2. Modélisation.	
1.2.1. Turbulence atmosphérique.....	7
1.2.2. Propagation optique dans le cas général.....	17
1.2.3. Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique.....	20

Chapitre 2 : L'imagerie à travers la turbulence atmosphérique.

2.1. Introduction à la formation de l'image	34
2.1.1. Loi de propagation d'une onde lumineuse.....	34
2.1.2. Relation objet image.....	34
2.1.3. Définition de la réponse impulsionnelle du système optique	35
2.1.4. Réponse impulsionnelle du système composé uniquement du télescope.....	37
2.1.5. Réponse du système optique en présence de turbulence atmosphérique.....	38
2.1.6. Image instantanée et image long temps de pose.....	39
2.2. Etude du phénomène d'agitation et l'étalement :	
2.2.1. Etude de l'agitation dans le plan image (Fluctuations des angles d'arrivée (A.A)).	42
2.2.2. La densité spectrale des fluctuations des AA ($W_{\alpha}(f_x, f_y)$).....	42
2.2.3. La fonction de structure des fluctuations des AA	43
2.2.4. Etude du phénomène d'étalement.....	44
2.2.5. Etude du phénomène de scintillation.....	46
2.3 Détermination du paramètre de Fried :	
2.3.1. Détermination de r_0 en utilisant l'agitation.....	48
2.3.2. Détermination de r_0 en utilisant l'étalement.....	49
2.3.3. Détermination des différents paramètres caractéristiques (méthodes d'inversion).....	50

2.4 Le bord solaire :

2.4.1 Le Modèle du limbe (assombrissement centre bord).....	51
2.4.2 Mesure du diamètre solaire.....	55
2.4.3 L'astrolabe.....	57
2.4.4 L'expérience DORaySol	58
2.4.5 Le projet Franco-Algérien (MISolFA).....	60

Chapitre 3 : Simulation numérique.

3.1. Simulation du bord solaire sans turbulence atmosphérique

3.1.1 Construction de l'image du bord solaire.....	65
3.1.2 Le bord pour différentes longueurs d'ondes.....	67
3.1.3 Le bord en fonction de l'échantillonnage.....	68
3.1.4 Simulation du bord solaire vu à travers la pupille d'un télescope.....	69

3.2. Simulation de la turbulence atmosphérique

3.2.1 Choix de la méthode spectrale.....	71
3.2.2 Méthode de Nakajima.....	71

3.3. La construction de la PSF pupille atmosphère

3.3.1 Echantillonnage.....	77
3.3.2 Cas anisoplanétique.....	78
3.3.3 Cas isoplanétique.....	79

3.4 Image du bord perturbé.....80

3.5. Dédution du paramètre de Fried.....82

3.5.1 La variance théorique des fluctuations d'angle d'arrivée.....	82
3.5.2 Extraction du paramètre de Fried sur les images du bord solaire.....	87
3.5.3 Etude du phénomène d'agitation	88
▪ Fluctuations de l'angle d'arrivée (AA) données par l'agitation de la PSF.....	88
3.5.4 Agitation du bord solaire.....	93
▪ Etude statistique des fluctuations point d'inflexion.....	93
▪ Etude statistique des fluctuations du photo-centre de la dérivée du bord.....	98

3.5.5 Agitation du bord convolué (correction de l'effet d'assombrissement)	102
▪ Etude statistique des fluctuations du photo-centre de la dérivée du bord	104
3.5.6 Calcul de l'étalement sur le bord solaire	107
▪ La PSF en long temps de pose.....	108
▪ Le bord solaire en longue pose.....	109
▪ Relation entre la FWHM et le paramètre de Fried.....	110
3.5.7 Discussion et comparaison des méthodes.....	113
Conclusion	114
Perspectives	115
Bibliographie	116
Annexe	121

Chapitre 1

Introduction à l'optique atmosphérique

*« Bien triste un ciel dont les
étoiles ne brillent pas... »*

I. Introduction générale :

Le ciel, c'est sans aucun doute, la première chose qui intrigua l'homme, fasciné par la majestueuse brillance du Soleil ou de la Lune, et par la myriade de points scintillants sur la voûte du ciel nocturne, sans se douter qu'un tel spectacle perdrait beaucoup de sa magie s'il se trouvait ailleurs dans l'univers. Puisque ajouté à son rôle dans la diffusion qui donne le bleu du ciel le jour, l'atmosphère terrestre est aussi responsable de la scintillation des étoiles la nuit, ou encore des magnifiques couleurs du crépuscule (figure (1.1a)) qui font toujours rêver les romantiques ! Jusqu'au 14^{ème} siècle l'homme n'avait que ses yeux pour observer le ciel mais dans sa quête d'aller toujours plus loin, il ne cessa, par son ingéniosité, de mettre en œuvre les moyens qui lui ont permis non seulement d'observer mais d'étudier d'infimes objets au fin fond de l'univers. Depuis quatre siècles nous disposons d'instruments optiques toujours plus efficaces, à commencer par la lunette astronomique (Galilée 1610) jusqu'aux plus grands télescopes dont la taille du miroir n'a cessé d'être augmentée pour atteindre dans un futur proche les 50 mètres de diamètre pour un miroir segmenté (OWL). Actuellement des télescopes gigantesques sont utilisés partout dans le monde, et dont le diamètre n'est pas moins de 8 mètres et qui peuvent atteindre une résolution angulaire de l'ordre de $0.25''$, qui représente la taille, en seconde d'arc, du plus petit détail que l'on peut observer sur une image, comme pour le VLT (*Very Large Telescope*) conçu par l'ESO (*European Southern Observatory*) au Paranal, Chili. Or cette résolution peut être atteinte avec un télescope de 40 cm. Cependant, augmenter la taille du miroir ne donnera pas forcément une meilleure résolution car celle-ci ne peut aller au delà d'une limite liée aux conditions d'observation. Cet obstacle auquel sont heurtés les instruments astronomiques les plus puissants est, désormais, l'atmosphère terrestre. Si celle-ci constitue une condition indispensable à l'existence et à la survie des créatures vivantes, elle apparaît dans ce cas là comme un phénomène gênant.

Parce que l'on ne peut éliminer le coupable, des méthodes de compensation ont été établies pour pousser cette limite et obtenir des résolutions limitées uniquement par la taille du télescope (limite de diffraction), on cite l'interférométrie, aussi l'optique adaptative qui a connu un grand champ d'application, en particulier dans les sites ayant de grands télescopes [53].

Bien sûr la question ne s'est pas posée pour les télescopes embarqués sur les satellites hors atmosphère. C'est clair, cette génération de télescopes spatiaux a constitué une véritable révolution dans l'observation astronomique, mais le coût des opérations de lancement, la difficulté du suivi et de l'entretien sans parler de la durée de vie des composants de l'instrument qui est bien plus faible comparée à leurs égaux sur terre puisque se débarrasser des méfaits de l'atmosphère, c'est aussi se débarrasser d'un bouclier protecteur contre les bombardements de particules et les radiations destructives venant des étoiles de manière générale et du Soleil en particulier, ce qui fait que l'imagerie à travers l'atmosphère a encore de belles années devant elle.



Figure (1.1a) : *Effet du rougissement du Soleil sur l'horizon causé par la réfraction de la lumière sur les couches de l'atmosphère terrestre.*

Le Soleil constitue un centre d'intérêt pour un bon nombre d'astronomes et astrophysiciens. Bien qu'il existe 100 milliards d'étoiles semblables au Soleil dans la Voie Lactée (notre galaxie), il demeure l'étoile la plus accessible à l'être humain puisque la plus proche se trouve à une distance de 40.000 milliards kilomètres de notre système solaire.

Le Soleil, qui est à l'origine de la vie sur terre, du climat, de la diversité de la faune ainsi que du règne animal, constitue la principale source d'énergie reçue par le système océan – atmosphère de notre planète. Celle-ci nous parvient sous forme de rayonnement et de particules apportées par le vent solaire. Son observation et modélisation furent le sujet d'importantes études dans le but de comprendre les processus physiques qui déterminent la configuration globale du Soleil, sa dynamique, sa variabilité et sa structure interne. Sa forme qui rentre dans le cadre des observations de la surface et qui a connu une grande évolution peut effectivement nous renseigner sur le reste des aspects, c'est dans ce cadre là que vient s'inscrire la surveillance du diamètre solaire, qui a été mesuré avec précision au 17^{ème} siècle par Jean Picard dans la période calme (pas de taches solaires). Ses mesures, reprises ultérieurement, ont révélé une variation du diamètre considéré jusque là constant, le diamètre solaire était donc plus grand d'une demi seconde d'arc par rapport à sa valeur en dehors de cette période. Ces mesures ont permis de reconstituer l'irradiance solaire totale pour les périodes passées. Après Picard, les mesures continuèrent, en utilisant plusieurs instruments. Différentes méthodes furent et sont toujours utilisées dont les résultats semblent être peu cohérents. Les mesures ont été obtenues par différentes méthodes (passage au méridien, passage de Mercure devant le Soleil, astrolabes, télescopes imageurs, héliosismologie) et cela sur des périodes de mesure différentes et dans des domaines spectraux variant d'un instrument à l'autre [56].

Certaines mesures n'indiquent aucune variation de diamètre alors que pour la même période d'autres observations montrent une variation avec l'activité solaire. La mesure de la durée de passage de Mercure devant le Soleil permet de déduire la valeur du diamètre solaire. Ces mesures montrent une variation périodique en relation avec le cycle de Gleissberg dont la durée est de l'ordre de 90 ans. Les variations du diamètre solaire obtenues à l'aide des éclipses de soleil montrent une anticorrélation avec l'activité solaire comme les mesures de Picard le suggéraient. Cependant les mesures récentes montrent des incohérences entre elles. La plus longue série a été obtenue avec l'astrolabe de Danjon placé au plateau de Calern [33] qui a révélé une anticorrélation entre l'activité solaire et le diamètre tendant à se dégrader vers les années 2000, puis montrant de nouveau l'anticorrélation pour les mesures récentes (2002). Cependant, le même instrument placé à Santiago montre une variation en phase avec l'activité et ayant une amplitude cinq fois plus grande qu'à Calern [42]. De façon évidente, les mesures au sol sont affectées par la traversée des photons dans l'atmosphère où la diffusion, la turbulence et les absorptions peuvent expliquer les résultats incohérents. En orbite, l'instrument MDI à bord de SOHO a permis d'étudier la structure interne du soleil par l'observation des modes d'oscillation. L'ensemble des mesures acquises depuis 1995 montre une variation du diamètre solaire dans laquelle on distingue des effets instrumentaux importants et ceux liés à la turbulence atmosphérique [56].

Le but de cette thèse est d'étudier les effets de la turbulence atmosphérique qui sont présents dans la mesure du diamètre solaire, en particulier celle prise par l'instrument DORaySol (Définition et Observation du Rayon Solaire) une modélisation permettant de caractériser la turbulence et ce, en se basant sur la simulation numérique. On parlera aussi du projet MISolFA (Moniteur d'images Solaires Franco Algérien) qui a pour but la détermination des paramètres caractéristiques chiffrant les conditions d'observation d'un site donné.

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la propagation des ondes lumineuses à travers la turbulence atmosphérique et son effet sur la formation des images de manière générale puis sur les images du bord solaire en particulier. Elle comprend un certain nombre de rappels sur les théories d'optique générale tel que la propagation des ondes lumineuses, la réfraction et la diffraction. On verra les modèles qui ont été utilisés pour décrire les phénomènes aléatoires qu'est la turbulence atmosphérique, cela repose donc sur une étude statistique.

La deuxième partie sera basée sur la simulation des images du bord telles qu'elles seront obtenues avec l'instrument DORaySol et MISolFA, puis la simulation des effets de la turbulence sur les images du bord. On discutera en détail les méthodes adoptées, puis sur les images affectées par la turbulence on va extraire le paramètre de Fried caractérisant les effets de cette turbulence sur les fronts d'onde. Pour cela on utilise plusieurs méthodes dont on va comparer les résultats.

1.2. Modélisation

1.2.1. Turbulence atmosphérique :

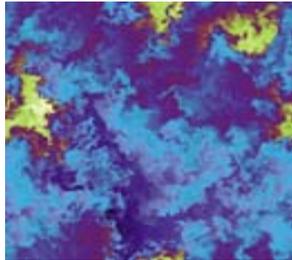
L'atmosphère, comme on l'a bien remarqué et constaté est responsable de tous les jeux de lumière observés dans le ciel, en perturbant de façon spectaculaire les directions et les couleurs des rayons lumineux qui nous parviennent du soleil ou de tout autre astre [1].

La réfraction, la réflexion, et la diffraction ou encore la diffusion et l'absorption sont à l'œuvre de l'atmosphère, ces phénomènes donnent lieu à des phénomènes bien connus tel que : les mirages, le rayon vert (figure, 1.1b), l'arc- en- ciel, la scintillation et l'agitation [35].



Figure 1.1b : *Image du rayon vert prise à l'observatoire de la Silla2*

La turbulence, le phénomène physique



*«Big whirls have little whirls, witch
feed on their velocity;
Little whirls have smaller whirls, and
so on unto viscosity. . . »
L.F Richardson.*

Le but de ce chapitre est, de rappeler les résultats les plus importants des travaux qui ont été fait sur l'étude statistique de la turbulence atmosphérique, et son effet sur la propagation des ondes lumineuses.

Dans ce paragraphe, on va parler de la nature et de la dynamique de l'atmosphère terrestre pour comprendre au mieux tous les phénomènes qu'elle engendre et qui seront le sujet du prochain paragraphe.

Leonardo da Vinci, l'artiste ingénieur de la Renaissance, fut le premier à avoir utiliser le mot « turbolenza » en français, turbulence, pour décrire les mouvements complexes de l'eau et de l'air en observant de plus près les tourbillons, les jets et les écoulements des fleuves, (voir figure 1.2). Les premiers expérimentateurs et théoriciens de la turbulence, parmi lesquels Poiseuille, Reynolds, viennent après Taylor et Von Karman ont donné la première définition de la turbulence comme étant « un mouvement irrégulier qui apparaît dans les fluides quand ceux-ci rencontrent des obstacles solides ».

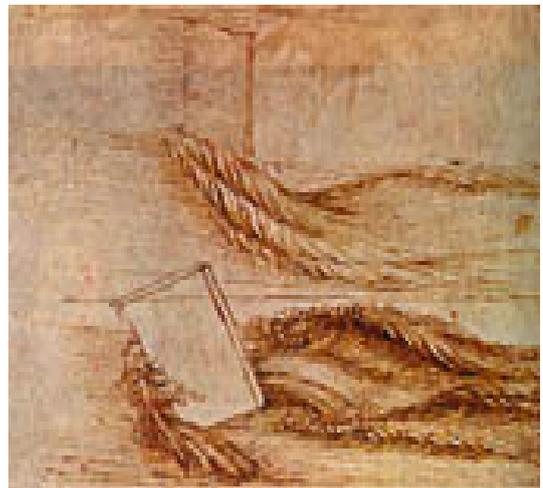


Figure 1.2 : *De la formation des eaux dessin à la plume, Royal Library, Windsor Castel, Angleterre.*

Ce n'est qu'au début du 19^{ème} siècle que Claude Navier a écrit les équations de base régissant l'évolution dans le temps de l'écoulement d'un fluide en turbulence [18].

Il existe deux types d'écoulements, on a l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent, pour le premier type il s'agit d'un mouvement régulier où tous les points du fluide ont la même vitesse alors que on a un mouvement tourbillonnaire irrégulier dans l'espace et dans le temps pour les écoulements turbulents. La turbulence est donc une propriété des écoulements d'un fluide et non du fluide lui-même et la complexité du phénomène a fait qu'aucune définition rigoureuse n'a été établie mais on peut indiquer le *caractère aléatoire* de la turbulence (l'irrégularité), le *caractère rotationnel aléatoire* de la vitesse (fluctuation de la vorticité), en plus de la *Diffusion et la Dissipation*. On note aussi parmi les propriétés caractéristiques de la turbulence, la diffusivité qui exprime le transfert permanent de quantité de mouvement, de la chaleur et de la masse, on a aussi un grand nombre de Reynolds (R_e) qui exprime le rapport des forces inertielles aux forces visqueuses, ce dernier sans dimension, nous permet de déterminer le type d'écoulement étudié si R_e dépasse une certaine valeur critique de l'ordre de 2000 alors on a atteint le régime turbulent. Il faut donc noter que la turbulence est un phénomène continu gouverné par les équations de la mécanique des Fluides [18].

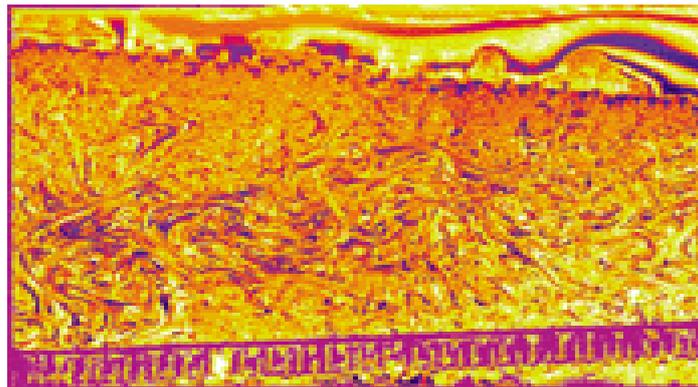


Figure1.3 : *comportement d'un fluide turbulent au voisinage et loin des parois*

La turbulence dans les couches atmosphériques :

On peut se poser la question : pourquoi l'atmosphère terrestre est elle le siège de la turbulence développée ? Et bien la réponse peut se présenter comme suit :

L'atmosphère terrestre, piégée entre le vide qu'est le milieu interstellaire, et la surface composée de l'hydrosphère et la croûte terrestre, cette enveloppe constituée principalement de gaz , est responsable du transfert énergétique entre ces deux milieux, le rayonnement du soleil d'un côté et la vapeur d'eau, sel, ...etc. de l'autre, compte tenu de ces échanges, des inhomogénéités apparaissent dans la répartition de la température et des teneurs en vapeur d'eau de l'atmosphère, aussi on a les écarts de densité en conjonction avec la gravité, la rotation et la géométrie terrestre, sont finalement les moteurs de l'ensemble des mouvements atmosphériques [18].

Caractéristiques spécifiques de la turbulence atmosphérique (Profil vertical) :

L'air atmosphérique est un mélange de gaz contenant des particules liquides et solides en suspension (gouttelettes d'eau, cristaux salins et les poussières provenant de la surface de la Terre). Chose qui a amené les météorologistes à considérer l'air comme un mélange de deux gaz, l'air sec (composé de plusieurs gaz dont les proportions restent sensiblement constantes) et la vapeur d'eau (l'humidité).

Les nombreuses mesures in situ effectuées dans la haute atmosphère permettent de se faire une idée de la répartition verticale des températures, cela a permis de définir un profil vertical type de l'atmosphère. La stratification dans la répartition des couches [46] dépend aussi du moment de l'observation, c'est à dire le jour ou la nuit. Le jour, on remarque une importante turbulence localisée au sol (l'environnement du télescope) à cause de l'échauffement des structures et du sol par le Soleil en plus de l'effet de cisaillement dû au vent alors que la nuit la turbulence est localisée en altitude. Puisque on a inversion de température dans la basse atmosphère (le sol se refroidit plus vite que l'air), l'air chaud stagne au dessus des masses d'air froid, ce qui crée une stabilité dans la basse atmosphère.

Dynamique des couches atmosphériques :

Le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent se fait au moment où le nombre de Reynolds atteint une valeur critique. Elle est de l'ordre de 10^6 pour l'air atmosphérique en prenant en moyenne la vitesse de l'écoulement $V = 1 \text{ m/s}$, pour une longueur caractéristique $L = 15 \text{ m}$ et sachant que la viscosité cinématique de l'air est $\nu = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ce qui correspond à une turbulence pleinement développée. Etudier cette turbulence revient donc à l'étude des processus de transfert de l'énergie dans l'espace et dans le temps [48][35].

Théorie du transfert d'énergie en cascade (Kolmogorov) :

Kolmogorov a proposé que dans une turbulence développée, l'énergie cinétique associée au mouvement à une dimension de l'ordre de L_0 dite « échelle externe » qui atteint les dizaines de mètres pour les couches atmosphériques, est transférée à des structures d'échelles de plus en plus petites jusqu'à une grandeur l_0 « échelle interne » de l'ordre du millimètre. En dessous de cette valeur le processus de transfert s'arrête et l'énergie cinétique est dissipée en chaleur par les frottements visqueux (friction). Le domaine compris entre ces deux valeurs caractéristiques où la turbulence est pleinement développée, est appelé domaine *inertiel* car les forces inertielles sont dominantes et les fluctuations de vitesse sont considérées statistiquement isotropes, les valeurs trouvées pour ces échelles sont variables et dépendent de l'altitude et des conditions locales. Tous les effets induits par la turbulence seront étudiés dans ce domaine.

En régime stationnaire, le taux de dissipation visqueuse ϵ_0 est équivalent au taux de production de l'énergie de turbulence donc on peut dire que la vitesse des mouvements V ne dépend que de la longueur caractéristique L et de ϵ_0 [30][18][48].

Un raisonnement dimensionnel basé sur le principe de transfert en cascade de l'énergie cinétique et en prenant en compte la loi d'Obukhov et Yaglom 1949, qui montre que dans un écoulement turbulent les concentrations du mélange sont conservatives. Il s'agit donc d'un processus adiabatique c'est à dire, pas de réactions chimiques dans le milieu, ce qui permet de dire que les fluctuations de température et d'humidité comme ceux de la vitesse obéissent à la loi de Kolmogorov dans son domaine de validité c'est-à-dire le domaine inertiel [30][48].

En effet si on considère P le taux de production de l'énergie cinétique par unité de masse elle aura pour unité $[V^2 t^{-1}]$ et ε le taux de dissipation visqueuse de l'énergie dont l'unité est $[V^2 t^{-1}]$, alors en régime stationnaire on a $P = \varepsilon$, donc la vitesse sera donnée par :

$$V \sim L^{1/3} \cdot \varepsilon^{1/3} \quad (1.1)$$

L'analyse spectrale de l'énergie cinétique comme une fonction du module du vecteur d'onde ($\vec{K} = 2\pi \vec{f}$), où f est la fréquence spatiale, donne une fonction $E(f) df$ entre f et $f + df$ proportionnelle à $V^2(f)$ et tenant compte de (1.1) on écrit :

$$E(f) df \sim V^2(f) \sim [\varepsilon^{1/3} \cdot L^{1/3}]^2$$

or $L = 1/f$, et sachant qu'en régime stationnaire ε peut être considéré comme constant, on écrit finalement :

$$E(f) df \sim f^{-2/3} \quad (1.2)$$

C'est la loi de Kolmogorov qui n'est valide que dans un domaine inertiel tel que :

$$L_0^{-1} \ll f \ll l_0^{-1} \quad (1.3)$$

L'avènement de la théorie de la turbulence homogène isotrope par Kolmogorov [30]. qui est devenue la théorie universelle constituant les fondements de notre connaissance de la turbulence atmosphérique et est la base de toutes les paramétrisations dans les modèles théoriques. A trois dimensions, en supposant l'isotropie du processus on peut passer au spectre à trois dimensions en intégrant sur toutes les directions on trouve :

$$E(f) = 4\pi f^2 \Phi_T(f) \quad (1.4)$$

et le spectre tridimensionnel sera donné par :

$$\Phi_T(f) \propto f^{-11/3} \quad (1.5)$$

Fluctuation de la température et l'indice de réfraction (n) :

La turbulence donne lieu à des mouvements tourbillonnaires qui vont entraîner des mélanges de masses d'air différentes en température et pression. Ces fluctuations seront responsables des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air entraînant les perturbations d'une onde électromagnétique lors de son passage à travers les couches atmosphériques.

L'indice de réfraction d'un gaz $n(\lambda)$ à la longueur d'onde λ est une grandeur physique qui varie avec sa densité ζ [14][19] :

$$n(r, t) = 1 + k(\lambda) \zeta \quad (1.6)$$

où $k(\lambda)$ est une grandeur qui ne dépend que de la nature du gaz et de la longueur d'onde de la lumière. Ceci correspond bien d'ailleurs à l'intuition : plus la densité du gaz est faible, plus l'indice doit être proche de celui du vide qui est 1. Pour un gaz parfait, l'équation d'état est donnée sous la forme :

$$n(r, t) = 1 + k(\lambda) \frac{P(r, t)}{T(r, t)} \quad (1.7)$$

Donc l'indice de réfraction de l'air dépend essentiellement de la température T et de l'humidité spécifique q . On peut dire que les fluctuations de ces paramètres induisent les fluctuations de l'indice de réfraction n . Dans l'atmosphère, la température de l'air peut varier très rapidement d'un point à un autre, l'indice dépend de la position dans l'espace et dans le temps. Si on prend pour une longueur d'onde λ fixe, la différentielle de n peut être donnée en prenant la température en un point donné :

$$T = \langle T \rangle + \Delta T \quad (1.8)$$

où $\langle T \rangle$ la moyenne, ΔT fluctuations de température à moyenne nulle

$$\text{on écrit :} \quad n = \langle n \rangle + \Delta n \quad (1.9)$$

$$\text{avec :} \quad \Delta n = (\partial n / \partial T) \Delta T + (\partial n / \partial q) \Delta q$$

$$\Delta n = A \Delta T + B \Delta q \quad (1.10)$$

Aux longueurs d'ondes optiques, le second terme peut être négligé, ce sont les fluctuations de température qui vont dominer par rapport aux fluctuations de pression et on écrit alors en première approximation la loi de Gladstone [14] [49] :

$$\Delta n = A \Delta T = k(\lambda) \frac{P(r, t)}{T(r, t)^2} \Delta T \quad (1.11)$$

la pression est exprimée en millibars et la température en Kelvin.

Dans le cas de l'air, et pour une longueur d'onde $\lambda = 0.5 \mu m$ (dans le visible) l'expression du coefficient A peut être déterminée par la relation de Gladstone où l'on considère l'air comme étant un gaz parfait avec :

$$K(\lambda) \approx 80 \cdot 10^{-6}$$

Etude statistique des fluctuations de l'indice de réfraction :

L'étude du phénomène de fluctuation de l'indice de réfraction nécessite une caractérisation statistique, on supposera dans tout ce qui suit qu'il s'agit des fluctuations, d'une variable aléatoire stationnaire et homogène; on définira ainsi la fonction de covariance des fluctuations de l'indice de réfraction [14] [49]:

$$B_{\Delta n}(\vec{\rho}, h) = \langle \Delta n(\vec{r}, h) \Delta n(\vec{r} + \vec{\rho}, h) \rangle$$

avec :

$$\begin{aligned} B_{\Delta n}(0, h) &= \langle \Delta n(\vec{r}, h) \Delta n(\vec{r}, h) \rangle \\ &= \langle \Delta n(\vec{r} + \vec{\rho}, h) \Delta n(\vec{r} + \vec{\rho}, h) \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

où ρ le décalage spatial entre deux points, h l'altitude de la couche et $\langle \dots \rangle$ est une moyenne d'ensemble, et en prenant $\Delta n(\vec{r})$ stationnaire entre h et $h + \delta h$. la fonction de covariance ne va dépendre localement que de la distance ρ entre deux points. On verra par la suite que cette fonction de covariance diverge pour $\rho = 0$ dans le cadre du modèle de Kolmogorov.

La fonction de structure des fluctuations de l'indice de réfraction :

Pour s'affranchir du problème de divergence de la covariance, une autre grandeur statistique a été définie par Tatarski [52] [48], c'est la fonction de structure des fluctuations de température ainsi que celle des fluctuations de l'indice de réfraction, elle représente la variance différentielle des fluctuations d'indice de réfraction entre deux points distants de ρ .

$$D_{\Delta n}(\vec{\rho}, h) = \langle [\Delta n(\vec{r}, h) - \Delta n(\vec{r} + \vec{\rho}, h)]^2 \rangle \quad (1.13)$$

Et on peut exprimer cette fonction de structure en fonction de la covariance suivant l'équation (1.12) par:

$$D_{\Delta n}(\vec{\rho}, h) = 2[B_{\Delta n}(0, h) - B_{\Delta n}(\vec{\rho}, h)] \quad (1.14)$$

On peut déterminer la fonction de structure des fluctuations de l'indice de réfraction en appliquant la relation de Gladstone sur la fonction de structure des fluctuations de température qui peut être réécrite, en terme d'énergie, en considérant $\epsilon_0 (L^2.t^{-3})$ le taux de

production de l'énergie turbulente et η_0 ($deg^2.t^{-3}$) le taux de production de température, l'analyse dimensionnelle nous ramène nécessairement à une combinaison de ces paramètres telle que la fonction de structure des fluctuations de températures sera donnée par [48][49] :

$$D_T(\vec{\rho}) \propto \eta_0 \cdot \varepsilon_0^{-1/3} \cdot \rho^{2/3} \quad (1.15)$$

D'où la loi d'Obukhov:

$$D_T(\vec{\rho}) = C_T^2 \cdot \rho^{2/3} \quad (1.16)$$

valable pour

$$l_0 \leq \rho \leq L_0$$

$C_T^2(h)$ représente la constante de structure des fluctuations de la température. La fonction de structure de l'indice de réfraction suit aussi la loi d'Obukhov et on a :

$$D_{\Delta n}(\vec{\rho}, h) = C_n^2(h) \rho^{2/3} \quad (1.17)$$

Avec $C_n^2(h)$ (de dimension $[m]^{-2/3}$.) définie comme étant la constante de structure des fluctuations de l'indice de réfraction, elle représente la force de turbulence à une hauteur h donnée. La fonction de structure montre en fait, la contribution de la différence des moyennes entre deux points, qu'on négligera devant celle due à la différence des fluctuations, puisque les moyennes sont peu variables entre deux points proches (ρ très petit) donc elle ne dépend que du décalage spatial ρ qui appartient au domaine inertiel. Elle est reliée à la constante de structure de la température en utilisant (1.4) par la relation [36]:

$$C_n^2(h) = A^2 \cdot C_T^2(h) \quad (1.18)$$

La densité spectrale des fluctuations de l'indice de réfraction :

On peut aussi caractériser statistiquement les fluctuations de l'indice de réfraction en considérant sa densité spectrale. La relation entre la covariance et la densité spectrale peut être donnée en utilisant le théorème de Wiener -Khinchine qui dit que dans le cas d'un processus homogène et isotrope, la covariance est la transformée de Fourier à trois dimensions de la densité spectrale et on écrit [48] [14]:

$$\begin{aligned} B_T(\vec{\rho}) &\equiv TF_3 \Phi_T(\vec{f}) \\ B_T(\vec{\rho}) &\equiv \iiint \Phi_T(\vec{f}) e^{-i2\pi\vec{f}\cdot\vec{\rho}} d\vec{f} \end{aligned} \quad (1.19)$$

cela revient à dire que la densité spectrale sera de la forme (Tatarski 1961) :

$$\begin{aligned} \Phi_T(\vec{K}) &= \left[\Gamma(8/3) \sin(\pi/3) / 4\pi^2 \right] C_T^2 K^{-11/3}. \\ \Phi_T(\vec{K}) &= 0.033 C_T^2 K^{-11/3} \end{aligned} \quad (1.20)$$

La densité spectrale de fluctuation de l'indice de réfraction sera déterminée de la même façon :

$$\Phi_n(\vec{K}) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3} \quad (1.21)$$

ou encore[48]

$$\Phi_n(\vec{f}) = 0.033 (2\pi)^{-2/3} C_n^2(h) f^{-11/3}. \quad (1.22)$$

avec f le module de la fréquence spatiale, cette formule n'est valide que dans le domaine inertiel [52].

La densité spectrale $\Phi_n(\vec{f})$ selon le modèle de Von Karman :

Pour éviter la divergence en zéro. Von Karman a proposé un modèle ad hoc pour prendre en considération les échelles limites du domaine inertiel, en introduisant une fréquence de coupure haute ($f=1/l_0$) et basse ($f=1/L_0$), avec l_0 l'échelle interne et L_0 l'échelle externe de la turbulence, et l'expression de la densité spectrale des fluctuations d'indice sera donnée dans ce modèle par :

$$\Phi_n(\vec{f}) = 0.033 (2\pi)^{-2/3} C_n^2(h) \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} \exp(-fl_0). \quad (1.23)$$

Le profil vertical de la turbulence atmosphérique $C_n^2(h)$:

La constante de structure est un paramètre important pour la qualification des sites d'observation astronomique. Elle donne l'intensité des fluctuations de l'indice de réfraction le long du chemin optique de l'onde lors de sa traversée de l'atmosphère. Sa connaissance est essentielle s'il on veut établir un profil caractéristique de la turbulence. Cette constante étant dépendante de plusieurs paramètres chiffrant les conditions météorologiques ainsi que la topographie du terrain et du temps d'observation (diurne ou nocturne). Plusieurs profils ont été établis expérimentalement (figure (1.4)) de deux manières différentes [53] :

- Mesure intégrée : on obtient pour cette méthode la force globale de la turbulence sur le trajet de l'onde Δh pour cela on a utilisé des instrument optiques tel que le Shack Hartmann [53] et le DIMM [50].

$$C_n^2 \Delta h = \int C_n^2(h) dh$$

- Mesure ponctuelle : dans ce cas là on a une valeur de $C_n^2(h)$ pour chaque altitude h en utilisant soit des ballons sondes (mesures de la fonction de structure des fluctuations de l'indice), soit un SCIDAR Généralisé [5] (mesure de la scintillation)

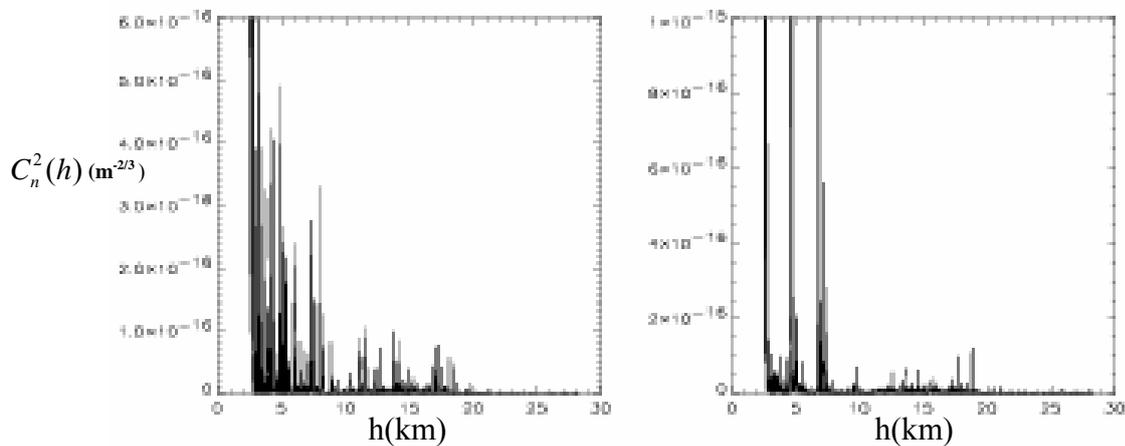


Figure 1.4 : Profils bruts de la constante de structure de l'indice de réfraction $C_n^2(h)$ en fonction de l'altitude h , obtenus au moyen de ballons instrumentés (campagne PARSCA92 U. de Nice, Département d'Astrophysique).

1.2.2 Propagation optique :

*Elle parcourt des chemins interminables,
elle passe à travers tout et rien ne l'arrête,
même du fin fond de l'univers elle arrive ...
toujours au bon moment au bon
endroit... plus fidèle que toi...
« Lumière » il n' y a pas.*

Dans ce qui a précédé on a parlé des propriétés de la turbulence atmosphérique, maintenant on va passer à l'étude des effets de la turbulence sur la formation des images et donc il s'agit d'étudier la propagation de l'onde lumineuse issue d'un objet observé à travers les couches atmosphériques. On commence d'abord par un rappel de la théorie principale de la propagation d'une onde optique dans un milieu quelconque puis on parlera de la propagation optique dans un milieu turbulent qu'est la couche atmosphérique.

Propagation d'une onde électromagnétique :

Les ondes lumineuses :

La lumière se présente comme un ensemble d'ondes électromagnétiques, un champ électrique E et un champ magnétique B , se déplaçant transversalement l'un par rapport à l'autre dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. L'intensité de chaque radiation est proportionnelle au carré de l'amplitude A . la longueur d'onde associée à cette radiation est donnée par $\lambda = c / \nu$ où ν représente la fréquence de l'onde et c la vitesse de la lumière. La loi de propagation spatiale de l'onde qui doit obéir à l'équation d'Helmholtz pour une onde monochromatique est donnée par [19]:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, z) + k^2 n^2(\vec{r}, z) \Psi(\vec{r}, z) = 0. \quad (1.24)$$

Propagation : optique géométrique

Le déplacement des ondes lumineuses obéit à plusieurs lois, selon la nature du milieu qui reçoit cette lumière. Toutes ces lois découlent d'un seul principe celui de Fermat et peut se traduire ainsi : La lumière emprunte toujours le chemin prenant le temps de parcours le plus court pour aller d'un point à un autre. On rappelle quelques propriétés de la propagation lumineuse [1] :

- dans un milieu homogène, la lumière se déplace en ligne droite.
- lorsque un rayon lumineux tombe sur une lame, il y a réflexion qui peut être totale (cas d'un miroir) ou partielle selon la nature de la lame réfléchissante, dans le deuxième cas une partie du faisceau va être transmise à travers cette lame.
- la réfraction indique le passage du rayon lumineux d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 différent. L'indice de réfraction n variant avec la couleur de la lumière incidente, donnera donc, pour un faisceau de lumière blanche (polychromatique) à la sortie d'un prisme, un spectre de plusieurs couleurs monochromatiques, cette décomposition est due au fait que l'angle de déviation du rayon lumineux dépend de la longueur d'onde associée.

Interférences et diffraction : optique physique

Les lois de la réflexion et de la réfraction ne peuvent expliquer toutes les observations, alors il a été établi d'autres propriétés de la lumière qui peuvent être regroupées sous le nom d'optique physique [1].

Si deux ondes lumineuses de même amplitude et même longueur d'onde se rencontrent avec un décalage d'une demi période, leur somme est nulle. Il y a extinction par interférences lumineuses. Un autre phénomène souvent observé, lorsque la lumière passant par une ouverture (fente ou trous) de dimensions très petites, donne lieu dans le plan image, une tâche centrale brillante suivie de zones sombres puis par d'autres zones de brillance de plus en plus faible. Cela peut s'expliquer par le fait que les rayons arrivant sur le bord du trou vont se diffracter dans tout les sens, de sorte que chaque point du trou va se comporter comme une source secondaire et tous les rayons ayant une différence des trajets qui diffère d'un nombre entier de périodes, vont s'accumuler en un point d'où les zones brillantes et ceux dont le trajet diffère d'un nombre impair de demi périodes vont donner les zones sombres. Dans le cas de l'observation d'une étoile brillante où l'on utilise des lentilles concentrant la figure de diffraction au centre du plan image, on a pour un système optique d'ouverture circulaire D , la tâche centrale est bien plus intense que les anneaux, elle n'est pas ponctuelle, son rayon linéaire vaut $1,22.f.\lambda / D$ où f est la distance focale de la lentille. Le pouvoir séparateur d'un instrument est d'autant meilleur que l'ouverture est grande.

Les photons (nature corpusculaire de la lumière) :

Un autre aspect de la lumière expliquant les interactions entre matière et rayonnement où la théorie ondulatoire de la lumière ne pouvait le faire, la théorie corpusculaire qui admet que les ondes électromagnétiques sont associées à un courant de photons. Planck a établi que l'énergie transportée par un photon E_{photon} pour une radiation de fréquence ν est donnée par :

$$E_{\text{photon}} = h\nu = hc / \lambda$$

où h est la constante de Planck, égale à $6.626.10^{-34}$ S.I.

On s'intéressera à cet aspect là pour modéliser le bruit photonique affectant les images, en particulier celles du bord solaire. Pour cela on rappelle la loi donnant la distribution de l'énergie émise par une étoile, qui est considérée généralement comme un corps noir, en fonction de la température : c'est la loi de Planck :

$$I_{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad (1.25)$$

$$C_1 = 2\pi hc^2 = 3.74185 \text{ erg.cm}^2 / \text{s} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{hc}{k} = 1,43883 \text{ cm.K}$$

Pour les petites longueurs d'onde du domaine optique émises par une étoile de type solaire, à température d'environ $6000K$, le produit λT est petit donc on peut le négliger devant l'exponentielle, la loi de Planck devient [1]:

$$I_{\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (1.26)$$

1.2.3 Propagation optique à travers la turbulence atmosphérique :

Les couches atmosphériques constituent un milieu d'indice de réfraction continûment variable dans l'espace et dans le temps. Etudier la propagation optique à travers un tel milieu, on fait des approximations pour pouvoir appliquer les formalismes établis dans les cas les plus simples, puis introduire petit à petit les contraintes imposées par la turbulence.

Formalisme et approximation :

Pour commencer, on va d'abord prendre le modèle simple où l'on suppose que toute la turbulence est concentrée dans une couche, celle-ci est supposée suffisamment mince pour négliger les effets de diffraction de l'onde lumineuse à l'intérieur, c'est l'approximation des couches minces [48] [10]. Dans ce cas là, seule la phase du front d'onde est perturbée et la propagation est purement géométrique, on peut donc utiliser le formalisme de Fresnel [22].

Cas d'une seule couche :

On suppose que l'atmosphère est homogène partout sauf dans une couche mince turbulente horizontale d'épaisseur δh localisée à l'altitude h . Les fluctuations de la phase sont liées aux variations du chemin optique et donc aux fluctuations de l'indice de réfraction [48] [49]:

$$\Phi(\vec{r}, h) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(\vec{r}, h) \quad (1.27)$$

avec

$$\Delta n(\vec{r}, h) = \int_h^{h+\delta h} n(\vec{r}, z) dz$$

où $n(r, z)$ représente les fluctuations de l'indice de réfraction. Le champ complexe d'une onde en h s'écrit alors [22] :

$$\Psi(\vec{r}, h) = \exp i\phi(\vec{r}, h) \quad (1.28)$$

En prenant celle-ci égale à 1 à l'entrée de la couche où on peut écrire à $h + \delta h$:

$$\Psi(\vec{r}, h + \delta h) = 1$$

Sachant que les longueurs d'ondes optiques sont très petites par rapport à l'échelle de la perturbation des fronts d'ondes, l'approximation de Fresnel peut être utilisée pour déterminer le champ formé au niveau du sol [22]:

On a alors pour une seule couche :

$$\Psi_h(\vec{r}) \approx 1 + i\varphi_h(\vec{r}) \quad (1.31)$$

C'est l'*approximation des faibles perturbations* [48], ceci reste valable tant que la distance d'observation par rapport au zénith reste inférieure à 60°.

Dans ce cas, en remplaçant dans les équations (1.30), le champ complexe arrivant au sol s'écrit :

$$\Psi(\vec{r}, 0) = [1 + i\varphi(\vec{r}, h)] \otimes \frac{1}{i\lambda h} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda h}\right) \quad (1.32)$$

en passant à la transformée de Fourier de cette expression on peut montrer que :

$$1 \otimes \frac{1}{i\lambda h} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda h}\right) = 1$$

l'équation (1.32) devient donc:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = 1 + \varepsilon(\vec{r})$$

où la quantité complexe

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}, h) \otimes \frac{1}{\lambda h} \exp\left(\frac{i\pi r^2}{\lambda h}\right) \quad (1.33)$$

décrit les fluctuations de l'amplitude complexe au sol et peut être décomposée en deux termes :

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}, h) \otimes \left[\cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) + i \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) \right] / \lambda h$$

Sa partie réelle représente les fluctuations du module du champ complexe au sol $|\Psi(\vec{r}, 0)|$ et sera donnée par :

$$\chi(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}, h) \otimes \frac{1}{\lambda h} \cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) \quad (1.34)$$

Et la partie imaginaire qui décrit les fluctuations de la phase au sol est donnée par :

$$\varphi(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}, h) \otimes \frac{1}{\lambda h} \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) \quad (1.35)$$

En suivant le même raisonnement, dans le cas de plusieurs couches et en utilisant l'approximation des faibles perturbations on peut dire que les fluctuations de l'amplitude du champ complexe produites au niveau du sol s'ajoutent linéairement et on écrit :

$$\chi(\vec{r}, 0) = \sum_{j=1}^q \varphi_j(\vec{r}, h_j) \otimes \frac{1}{\lambda h_j} \cos\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h_j}\right) \quad (1.36)$$

avec q le nombre de couches minces correspondant aux altitudes h_q .

Cette expression représente en fait, les fluctuations de l'intensité donne lieu au phénomène de la scintillation qu'on étudiera dans les paragraphes suivants.

De la même manière, L'expression donnant les fluctuations de la phase au sol est donnée tel que :

$$\varphi(\vec{r}, 0) = \sum_{j=1}^q \varphi_j(\vec{r}, h_j) \otimes \frac{1}{\lambda h_j} \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h_j}\right) \quad (1.37)$$

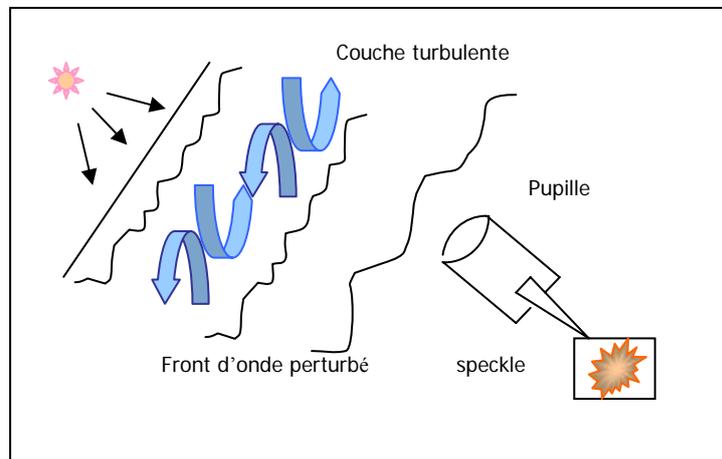


Figure (1.5) : la formation du speckle dans le plan focal du télescope à cause de la déformation du front d'onde traversant la turbulence atmosphérique.

Propriétés statistiques de la phase :

Toutes ces hypothèses nous conduisent à considérer que la grandeur sur laquelle va la turbulence agir, de manière significative, est la phase de l'onde ce qui nécessite une caractérisation, sachant que celle-ci est directement liée aux fluctuations de l'indice de réfraction du milieu.

La fonction de covariance associée aux fluctuations de la phase $B_\varphi(\vec{\rho}, h)$:

On a par définition la covariance [48]:

$$B_\varphi(\vec{\rho}, h) = \langle \varphi(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle \quad (1.38)$$

En remplaçant l'équation (1.27) dans l'équation (1.38)

$$B_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \int_h^{h+\delta h} dz \int_h^{h+\delta h} dz' \langle n(\vec{r}, z) \cdot n(\vec{r} + \vec{\rho}, z') \rangle$$

on pose : $\zeta = z' - z$

$$\text{on obtient : } B_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \int_h^{h+\delta h} dz \int_{h-z}^{h+\delta h-z} d\zeta \langle n(\vec{r}, z) \cdot n(\vec{r} + \vec{\rho}, z + \zeta) \rangle$$

Pour δh très grand devant la largeur de corrélation des fluctuations d'indice, l'intégrale peut être étendue de $-\infty$ à $+\infty$ tel que :

$$B_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \int_h^{h+\delta h} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \langle n(\vec{r}, z) \cdot n(\vec{r} + \vec{\rho}, z + \zeta) \rangle$$

Si l'on considère la fonction de covariance tridimensionnelle des fluctuations de l'indice de réfraction $B_n(\vec{\rho}, \zeta)$, l'expression de la covariance associée aux fluctuations de la phase sera donnée par :

$$B_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \int_h^{h+\delta h} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta B_n(\vec{\rho}, \zeta)$$

$$\text{donc : } B_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \delta h \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta B_n(\vec{\rho}, \zeta). \quad (1.39)$$

La fonction de structure de la phase :

Comme on l'a déjà montré, la fonction de structure des fluctuations de la phase peut être donnée en fonction de la covariance [52] [48] [49] :

$$D_\varphi(\vec{\rho}, h) = 2[B_\varphi(0, h) - B_\varphi(\vec{\rho}, h)].$$

et en utilisant les équations (1.17) et (1.39) :

$$D_\varphi(\vec{\rho}, h) = 2k^2 \delta h \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [B_n(0, \zeta) - B_n(\vec{\rho}, \zeta)].$$

sachant que :

$$D_n(\vec{\rho}, \zeta) = 2[B_n(0, 0) - B_n(\vec{\rho}, \zeta)].$$

on obtient

$$D_\varphi(\vec{\rho}, h) = 2k^2 \delta h \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [B_n(0, \zeta) - B_n(\vec{\rho}, \zeta) + B_n(0, 0) - B_n(0, 0)].$$

$$D_\varphi(\vec{\rho}, h) = k^2 \delta h \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [D_n(\vec{\rho}, \zeta) - D_n(0, \zeta)].$$

et en appliquant la loi d'Obukhov tel que :

$$D_n(\vec{\rho}, \zeta) = C_n^2 (\rho^2 + \zeta^2)^{1/3}$$

$$D_n(0, \zeta) = C_n^2 (0 + \zeta^2)^{1/3} = C_n^2 \zeta^{2/3}.$$

On a

$$\begin{aligned} D_\varphi(\vec{\rho}, h) &= k^2 \delta h C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [(\rho^2 + \zeta^2)^{1/3} - \zeta^{2/3}] \\ &= k^2 \delta h C_n^2 \{ 2.914 \rho^{5/3} \}. \end{aligned}$$

Finalement, l'expression donnant la fonction de structure pour une couche localisée à l'altitude h sera :

$$D_\varphi(\vec{\rho}, h) = 2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h \rho^{5/3}. \quad (1.40)$$

On appelle $(2\pi/\lambda)^2 \rho^{5/3}$ le facteur de forme (il détermine les propriétés spectrales de la turbulence) et $C_n^2(h) \delta h$ son facteur d'énergie.

Dans le cas des couche multiples, où on suppose que la turbulence est stratifiée en altitude selon des plans parallèles au sol et que les propriétés spectrales sont les mêmes quelle que

soit h , seule l'énergie varie, donc la fonction de structure totale des fluctuations de la phase sera donnée dans les deux cas, discret et continu par :

$$D_{\varphi}(\vec{\rho}, h) = 2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \rho^{5/3} \sum_j C_n^2(h_j) \delta h_j. \quad (1.41)$$

$$D_{\varphi}(\vec{\rho}, h) = 2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \rho^{5/3} \int_0^{\infty} C_n^2(h) \delta h. \quad (1.42)$$

La densité spectrale de la phase :

En appliquant le théorème de Wiener -Khinchine, la densité spectrale de la phase noté DSP, dans le domaine inertiel de Kolmogorov s'écrit en fonction de la covariance tel que :

$$W_{\varphi}(\vec{f}) = \int B_{\varphi}(\vec{\rho}) \exp(-i2\pi \vec{f} \cdot \vec{\rho}) d\vec{\rho}$$

et en utilisant l'équation (1.39)

$$W_{\varphi}(\vec{f}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \delta h \int B_n(\vec{\rho}) \exp(-i2\pi \vec{f} \cdot \vec{\rho}) d\vec{\rho}$$

De cette expression on peut écrire la DSP en fonction de la densité spectrale des fluctuations de l'indice de réfraction :

$$W_{\varphi}(\vec{f}) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \delta h \Phi_n(\vec{f}) \quad (1.43)$$

En remplaçant $\Phi_n(\vec{f})$ par son expression donnée selon le modèle de Kolmogorov (équation(1.22)) on obtient:

$$W_{\varphi}(\vec{f}) = 0.3827 \lambda^{-2} f^{-11/3} C_n^2(h) \delta h. \quad (1.44)$$

et dans le modèle de Von Kàrmàn (équation.(1.23)) :

$$W_{\varphi}(\vec{f}) = 0.3827 \lambda^{-2} \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-\frac{11}{6}} \exp-(1.12 fl_0) C_n^2(h) \delta h. \quad (1.45)$$

Dans notre étude on prendra le modèle proposé par Von Kàrmàn, qui est le plus utilisé dont la détermination de l'expression exacte de la densité spectrale des fluctuations de l'indice ainsi que celle de la phase.

Cas de multiples couches :

On prend pour cela l'expression de la phase pour l'onde arrivant au sol après avoir subi la diffraction à travers ces couches, comme on a déjà montré dans le paragraphe précédent on a, selon l'équation (1.37):

$$\varphi(\vec{r}, 0) = \int_0^{h_{\max}} dh \varphi(\vec{r}, h) \otimes \frac{1}{\lambda h} \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right)$$

En appliquant le théorème de Wiener – Khinchine la densité spectrale des fluctuations de la phase au sol sera donnée par :

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}, h) = \left| TF \left[\int dh \varphi(\vec{r}, h) \otimes \frac{1}{\lambda h} \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) \right] \right|^2$$

sachant que la Transformé de Fourier d'une somme est la somme des Transformés de Fourier on écrit :

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}) = \int dh W_{\varphi}(\vec{f}) \cdot \left| TF \left(\frac{1}{\lambda h} \sin\left(\frac{\pi r^2}{\lambda h}\right) \right) \right|^2$$

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}) = \int dh W_{\varphi}(\vec{f}) \cdot (\cos \pi \lambda h f^2)^2 \quad (1.46)$$

De la même manière on peut déterminer l'expression donnant la densité spectrale des fluctuations du logarithme de l'amplitude :

$$W_{\chi_0}(\vec{f}) = \int dh W_{\varphi}(\vec{f}) \cdot (\sin \pi \lambda h f^2)^2 \quad (1.47)$$

Approximation du champ proche :

Dans le cas des observations en astronomie les effets de la diffraction sont négligeables par rapport aux effets de fluctuation de la phase, on peut donc approximer la propagation dans l'atmosphère par les perturbations affectant juste la phase. En négligeant l'effet de la diffraction entre les couches, la densité spectrale des fluctuations spatiales de l'amplitude complexe $\Psi(r)$ est confondue avec celle de la phase [48].

$$\begin{aligned} W_{\Psi_0}(\vec{f}, h) &= W_{\varphi_0}(\vec{f}, h) + W_{\chi_0}(\vec{f}, h) \\ &\approx W_{\varphi_0}(\vec{f}, h) \end{aligned} \quad (1.48)$$

La DSP selon les différents modèles utilisés :

Le modèle de Kolmogorov :

En utilisant l'équation (1.44) et (1.47) la densité spectrale des fluctuations de la phase de l'onde arrivant au sol et traversant plusieurs couches dans une direction d'observation par rapport au zénith γ , sera donnée selon le modèle de Kolmogorov :

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \lambda^{-2} \int C_n^2(h) \delta h f^{-11/3} (\cos \pi \lambda h f^2)^2 \quad (1.49)$$

Le modèle de Kolmogorov étant incapable de décrire le comportement des fluctuations atmosphériques en dehors du domaine inertiel, alors que des études concernant les observations astronomiques nécessitent une extension du domaine surtout pour les basses fréquences spatiales. Ainsi, différents modèles ont été proposés pour faire une extension au modèle précédent au delà de la limite externe, par souci de compatibilité, bien entendu, ces modèles qui sont empiriques sont présentés comme des corrections du modèle de Kolmogorov, d'où la nécessité de vérifier certaines conditions afin de retrouver les mêmes résultats dans le domaine inertiel. La validité des modèles, en question, ne peut être obtenue qu'en comparant les résultats expérimentaux et théoriques.

Le modèle de Von Kàrmàn :

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \lambda^{-2} \int \delta h C_n^2(h) \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-11/6} e^{-(1.12 f l_0)} (\cos \pi \lambda h f^2)^2 \quad (1.50)$$

Le model de Von Karman et Hill Andrews :

Un autre modèle qui prend en compte une correction sur les hautes fréquences :

$$W_{\varphi_0}(\vec{f}) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \lambda^{-2} \int \delta h C_n^2(h) \left(\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right)^{-11/6} \times \quad (1.51) \\ \left[1 + 3.431 f l_0 - 0.5384 (f l_0)^{7/6} \right] \exp \left[-3.6215 (f l_0)^2 \right] (\cos \pi \lambda h f^2)^2$$

La fonction de structure de la phase arrivant au sol :

Pour déterminer la fonction de structure de la phase arrivant au sol, on doit écrire l'expression de la covariance $B_\varphi(\vec{\rho}, 0)$ qui est la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de la phase, on prendra pour notre étude celle donnée par Von Kàrmàn, donc pour une couche localisée à l'altitude h , sachant que la densité spectrale est une fonction

réelle et paire et que sa transformée de Fourier possède les mêmes caractéristiques, la covariance spatiale des fluctuations de la phase sera donnée par :

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \lambda^{-2} \int df \int \delta h C_n^2(h) 2\pi f \times \\ J_0(2\pi fr) \left[\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right]^{\frac{-11}{6}} e^{-(1.12 fl_0)} (\cos \pi \lambda h f^2)^2$$

où $J_0(X)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0.

Or on a déjà établi la relation entre la covariance et la fonction de structure; on arrive à l'expression finale de celle-ci :

$$D_{\varphi_0}(\vec{r}) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \lambda^{-2} \int df \int \delta h C_n^2(h) 2\pi f \times \\ [1 - J_0(2\pi fr)] \left[\left(\frac{1}{L_0} \right)^2 + f^2 \right]^{\frac{-11}{6}} e^{-(1.12 fl_0)} (\cos \pi \lambda h f^2)^2 \quad (1.52)$$

Différents paramètres optiques sont utilisés dans la caractérisation des effets de la turbulence sur les fronts d'ondes. On détermine dans ce qui suit ceux qui sont importants dans notre étude. Pour cela on doit d'abord, réécrire l'expression de la covariance du front d'onde $B_{\varphi_0}(\vec{r}, h)$ liée à l'amplitude complexe de l'onde arrivant au sol $\psi_0(\vec{r})$ par:

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = \langle \psi_0(\vec{r}) \cdot \psi_0^*(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle \\ = \langle \exp i\varphi_0(\vec{r}) \cdot \exp -i\varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle \\ = \langle \exp i[\varphi_0(\vec{r}) - \varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})] \rangle$$

en utilisant les statistiques d'une distribution Gaussienne à valeur moyenne nulle, on peut dans notre cas appliquer la formule suivante:

$$\langle \exp(aG) \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} a^2 \langle G^2 \rangle\right)$$

La covariance devient :

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = \exp\left[-\frac{1}{2} \langle [\varphi_0(\vec{r}) - \varphi_0(\vec{r} + \vec{\rho})]^2 \rangle\right] \\ = \exp\left[-\frac{1}{2} D_{\varphi_0}(\vec{r}, h)\right] \quad (1.53)$$

on remplace $D_{\phi}(\rho)$ par son expression en fonction de $C_n^2(h)$ on obtient :

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(h) \delta h \rho^{5/3} \right) \right]$$

En tenant compte de l'écart γ on multiplie par $\cos^{-1}(\gamma)$ et en intégrant sur toute l'atmosphère, on a :

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = \exp - \frac{1}{2} \left(2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos^{-1}(\gamma) \rho^{5/3} \int C_n^2(h) dh \right) \quad (1.54)$$

Le paramètre de Fried :

C'est un paramètre très important quand on s'intéresse aux effets de la turbulence atmosphérique sur la propagation optique des ondes lumineuses et sur la formation des images [21] [48].

Fried proposa une expression simple pour la fonction de structure de la phase en introduisant un paramètre r_0 tel que [21]:

$$D_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1.55)$$

remplaçons dans (1.53) on a :

$$B_{\varphi_0}(\vec{r}, h) = \exp - \left(3.44 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \right) \quad (1.56)$$

En comparant les deux expressions de la covariance (1.54) et (1.56) on a l'expression de r_0 en fonction de la constante de structure :

$$r_0 = \left[16.704 \lambda^{-2} \cos^{-1}(\gamma) \int C_n^2(h) dh \right]^{-3/5} \quad (1.57)$$

Cette expression est définie pour le spectre de Kolmogorov mais elle sera utilisée aussi pour le spectre de Von Kàrmàn. Le paramètre de Fried peut être vu comme le rayon de la zone où le champ complexe associé à l'onde, traversant la turbulence, reste cohérent spatialement et de manière générale il nous donne la force de la turbulence. On verra plus loin aussi ce qu'il représente en imagerie. Avec les mesures expérimentales de r_0 , on trouve comme ordre de grandeur, dans le visible, 5 cm dans des conditions de grande turbulence, et pouvant atteindre 20 cm pour une faible turbulence, sous de bonnes conditions d'observation comme c'est le cas dans les observatoires situés sur les sommets des montagnes (ESO, Paranal) ou en antarctique (Dôme C).

Les observations expérimentales nous permettent de vérifier la dépendance en λ tel que [48]:

$$r_0 \propto [\lambda^{-2}]^{-3/5} \propto \lambda^{6/5}$$

r_0 est donc un paramètre chromatique(plus la longueur d'onde sera faible, plus les effets de la turbulence sur les images seront importants).

Evolution angulaire de la phase :

Si l'on prend deux sources de lumière séparées angulairement, les fronts d'ondes associés à chacune des deux sources ne vont pas traverser la même perturbation dans les couches atmosphériques. On parle alors d'une décorrélation angulaire de la phase, ce qui est souvent le cas lorsqu'on prend une source de lumière étendue dont tous les points ne vont pas traverser la même turbulence. Ceci représente l'un des grands problèmes auxquels est soumise l'imagerie en haute résolution angulaire. En vue de simplifier l'étude on définit un domaine où l'on suppose l'isoplanétisme [48] [20].

Le domaine isoplanétique θ_0 :

L'isoplanétisme exprime dans le cas général, la similitude des fronts d'ondes arrivant sur la pupille du télescope en provenance de deux sources ponctuelles séparées par un angle θ (figure (1.6)) et qui ont traversé différentes zones de la turbulence atmosphérique. Plusieurs types d'isoplanétisme ont été introduits par Fried selon le domaine d'étude (l'optique adaptative si on prend les fronts d'ondes ou l'interférométrie si l'on considère les figures de speckle) [48] [53].

Pour calculer les effets d'anisoplanétisme, on suit la trace des rayons venant de deux étoiles séparées par un angle θ vu par rapport à la pupille du télescope, où ils coïncident, leur séparation r à la distance d est donnée par $r = \theta \times d$, si on considère l'angle d'observation par rapport au zénith (γ) et l'altitude h on aura

$$r = \theta.h.(\cos \gamma)^{-1}$$

on calcule la variance de la phase entre ces deux rayons, celle-ci est en fait, la fonction de structure de la phase :

$$\langle \sigma_\theta^2 \rangle \Leftrightarrow D_{\varphi_0}(\vec{r}, h)$$

en remplaçant r par sa valeur et prenant l'expression de la fonction de structure (1.42) on aura:

$$\langle \sigma_\theta^2 \rangle = 2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{-1} \int_0^\infty \delta h C_n^2(h) \left(\frac{h\theta}{\cos \theta} \right)^{5/3} .$$

$$\langle \sigma_\theta^2 \rangle = 2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{8/3} \theta^{5/3} \int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/3} dh$$

qu'on écrit sous la forme : $\langle \sigma_\theta^2 \rangle = \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^{5/3}$

avec : θ_0 l'angle isoplanétique pour lequel la variance de la phase relative est de 1 rad^2 et qui a pour expression :

$$\theta_0 = \left[2.914 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma)^{-8/3} \theta^{5/3} \int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/3} dh \right]^{-3/5}$$

La relation entre θ_0 et r_0 , peut être déterminée en comparant les expressions des deux paramètres :

$$\frac{\theta_0}{r_0} = 0.314 \cos \gamma / H$$

avec $H = \left[\frac{\int_0^\infty C_n^2(h) h^{5/3} dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{3/5}$

où H représente la hauteur de turbulence effective moyenne. On remarque que plus la turbulence est localisée en haute altitude plus la décorrélation est importante.

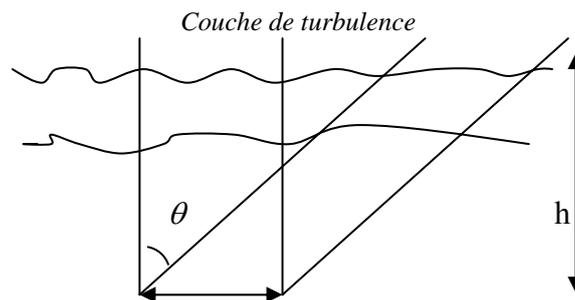


Figure (1.6) : si le champ angulaire de la turbulence dépasse l'angle isoplanétique, alors on ne peut plus parler de cohérence spatiale.

Evolution temporelle de la phase :

Dans ce qui précède, on a considéré que l'effet des structures spatiales de la turbulence atmosphérique sur les fronts d'ondes comme étant des phénomènes statiques, chose qui n'est pas réelle. Ajouté à la décorrélation spatiale des fronts d'ondes à cause de la turbulence atmosphérique, on a l'effet dû à l'évolution de cette dernière dans le temps. Ce sont, en réalité, deux processus dynamiques : La translation horizontale des couches atmosphériques par effet d'entraînement du vent qui est un mouvement d'ensemble, et le boiling.

Le boiling :

Le bouillonnement ou (*boiling*) est un mouvement chaotique dans les structures turbulentes d'une couche donnée. Ce processus est lié aux propriétés intrinsèques de cette couche, il peut être décrit comme une décorrélation temporelle dans le spectre des fluctuations de la phase [6].

L'hypothèse de Taylor et le temps de cohérence :

Puisque certaines techniques d'imagerie en haute résolution angulaire sont basées sur l'enregistrement d'images en un temps très court (ou courte pose), l'imagerie classique dite image longue pose, se différencie de la première par la perte d'informations à haute résolution angulaire. La limitation du temps de pose, imposée par la variabilité temporelle des perturbations du front d'onde, va être nécessaire pour « geler » l'évolution de la turbulence pendant toute la durée de l'enregistrement. On introduit, alors, le paramètre τ_0 , appelé temps de cohérence de l'atmosphère qui caractérise la décorrélation entre des perturbations de la surface d'onde à deux instants différents [18][6]. En utilisant l'hypothèse de Taylor pour un modèle d'une couche de perturbations figée (frozen), se déplaçant à vitesse constante dans une direction donnée, Roddier a montré que le comportement temporel de la turbulence peut être caractérisé par la constante

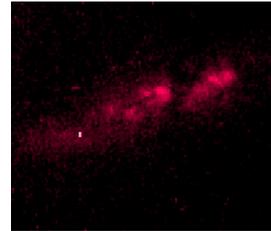
$$\tau_0 \equiv D/V$$

avec V : la vitesse du vent (qui a une valeur typique de 20 m/s) et D le diamètre du télescope.

Chapitre 2

Une image vaut mille mots

L'imagerie à travers La turbulence atmosphérique.



2.1. Introduction à la théorie de la formation de l'image :

Dans ce chapitre on parlera d'abord de la formation de l'image dans le plan focal d'un télescope et cela en tenant compte des effets de la turbulence sur celle-ci.

2.1.1. Loi de propagation d'une onde lumineuse :

En astrophysique, l'observateur ne perçoit qu'une projection à deux dimensions sur la sphère céleste du flux émergent de l'astre étudié. Cette projection s'appelle la fonction d'émission radiative de l'objet et l'on notera dans la suite $O(x_0, y_0)$, où x_0 et y_0 sont les coordonnées spatiales dans le plan objet, de même on définit la fonction donnant la distribution d'irradiance observée dans le plan image par $I(x, y)$. L'image peut être représentée comme une fonction de la position, de la longueur d'onde, du temps ou de l'intensité $I(x, y, \lambda, t)$.

Si l'on considère le cas idéal d'une onde se propageant dans un milieu parfaitement homogène et sachant que l'image optique est la reproduction homothétique d'un objet à partir de la lumière qu'il émet alors il existe une fonction reliant les distributions d'énergie dans le plan objet à celles dans le plan image, soit [48] :

$$I(x, y) = S(x, y, x_0, y_0, O(x_0, y_0))$$

2.1.2 Relation objet image :

Afin de simplifier l'étude, on prendra en compte dans ce qui suit les hypothèses suivantes [22] :

L'incohérence de la source lumineuse : ceci nous permettra de faire une sommation sur les intensités des différents points de l'objet en chaque point de l'image ; c'est la propriété

de « linéarité » ce qui est le cas, généralement, dans le processus de formation des images astronomiques.

Le phénomène est continu : c'est dire que pour des points voisins, on a les mêmes propriétés (dans le cas des sources étendues).

L'invariance par translation : dans ce cas on suppose qu'à une translation de l'objet, correspond une translation égale de l'image (même sens et même direction).

L'isoplanétisme : pour lequel on suppose que les ondes lumineuses subissent les mêmes perturbations atmosphériques dans un domaine angulaire qui est le domaine d'isoplanétisme.

Les deux premières hypothèses nous permettent d'écrire la relation précédente sous la forme de l'intégrale de Fredholm :

$$I(x, y) = \iint S(x, y, x_0, y_0).O(x_0, y_0)dx_0dy_0 \quad (2.1)$$

$S(x, y, x_0, y_0)$ est appelée la réponse impulsionnelle du système, en anglais « Point Spread Function » ; on prendra comme notation dans ce qui suit PSF. Cependant, si l'on considère l'hypothèse de l'invariance par translation, on suppose en fait que pour chaque point de l'image on a la même PSF et donc l'image dépendra de la différence des variables tel que :

$$I(x, y) = \iint S(x - x_0, y - y_0).O(x_0, y_0)dx_0dy_0 \quad (2.2)$$

qui est le produit de convolution des deux fonctions O et S donné par :

$$I(x, y) = O(x, y) \otimes S(x, y) \quad (2.3)$$

2.1.3 Définition de la réponse impulsionnelle du système optique (PSF) :

Chaque onde lumineuse émergent de l'objet est transmise, lors de sa traversée de la turbulence et de la pupille, avec une amplitude affaiblie d'un facteur $|S(x, y)|$ et subit un déphasage d'une quantité égale à $\varphi_{S(x,y)}$ phase de $S(x, y)$. Si on applique sur l'équation (2.3) le théorème de convolution (Annexe) pour écrire le spectre $A_I(f_x, f_y)$ des ondes transmises par le système (pupille – atmosphère), on obtient :

$$A_I(f_x, f_y) = A_O(f_x, f_y).T(f_x, f_y) \quad (2.4)$$

où A_I , A_O et T représentent, respectivement, les transformées de Fourier de I , O et S .

La fonction donnée par :

$$T(f_x, f_y) = \iint S(x, y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \quad (2.5)$$

est appelée la fonction de transfert de modulation instantanée FTM. Cette fonction caractéristique, exprime les effets du système dans le domaine des fréquences.

La PSF donnée dans le cas d'une lumière incohérente est proportionnelle au carré du module de la PSF obtenue en éclairage cohérent [22] selon la théorie de la diffraction de Fraunhofer, on écrit :

$$FTM = T(f_x, f_y) = |G(f_x, f_y)|^2 \quad (2.6)$$

avec $G(f_x, f_y)$ représentant ici la fonction de transfert cohérente ; elle est donnée par :

$$G(f_x, f_y) = \frac{1}{\Pi^{1/2}} \iint \psi(x, y) P(x, y) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \quad (2.7)$$

où $P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{à l'intérieur de la pupille} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

C'est la fonction pupillaire caractéristique du télescope considéré comme parfait ou sans aberrations. La fonction $\Psi(x, y)$, représente l'amplitude complexe de l'onde après son passage à travers la perturbation atmosphérique et Π la surface de la pupille égale à $\frac{\pi}{4} D^2$ ajoutée comme facteur de normalisation. Si on reprend l'expression(2.7), on remarque que cette fonction, elle même, est une transformée de Fourier tel que [48] [49] :

$$G(f_x, f_y) = \frac{1}{\Pi^{1/2}} TF[\psi(x, y)P(x, y)]$$

Et l'équation (2.6) devient :

$$T(f_x, f_y) = \frac{1}{\Pi} |TF[\psi(x, y)P(x, y)]|^2 \quad (2.8)$$

En appliquant le théorème de Wiener -Khinchine (Annexe), on peut dire que la fonction de transfert optique (FTO) n'est rien d'autre que l'auto-corrélation du produit $P(x, y) \cdot \Psi(x, y)$ définie par :

$$T(f_x, f_y) = \frac{1}{\Pi} \iint \psi(x, y) \psi^*(x+u, y+v) P(x, y) P(x+u, y+v) dx dy \quad (2.9)$$

avec $u = \lambda f_x, v = \lambda f_y$

Cette expression donne la distribution angulaire d'intensité dans le plan image.

2.1.4 Réponse impulsionnelle du système composé uniquement du télescope :

C'est le cas simple où l'on ignore l'effet de la turbulence atmosphérique. Cela consiste, par exemple, en l'observation d'un point source par un télescope ayant une pupille circulaire de diamètre D . Dans ce cas l'expression (2.9) devient [48] [49] [10] :

$$T_{inst}(f_x, f_y) = \frac{1}{\Pi} \iint P(x, y)P(x + u, y + v)dx dy \quad (2.10)$$

Cette expression donne le filtrage dû, uniquement, à la diffraction sur la pupille du télescope. Ce dernier étant bien sûr, supposé sans aberrations optiques (transmittance parfaite), la figure obtenue sur le plan image est la tâche d'Airy (figure 2.1). Le rayon de la tâche centrale, qui est de l'ordre de $1.22 \lambda / D$, définit la limite de résolution du système imposée par la diffraction.

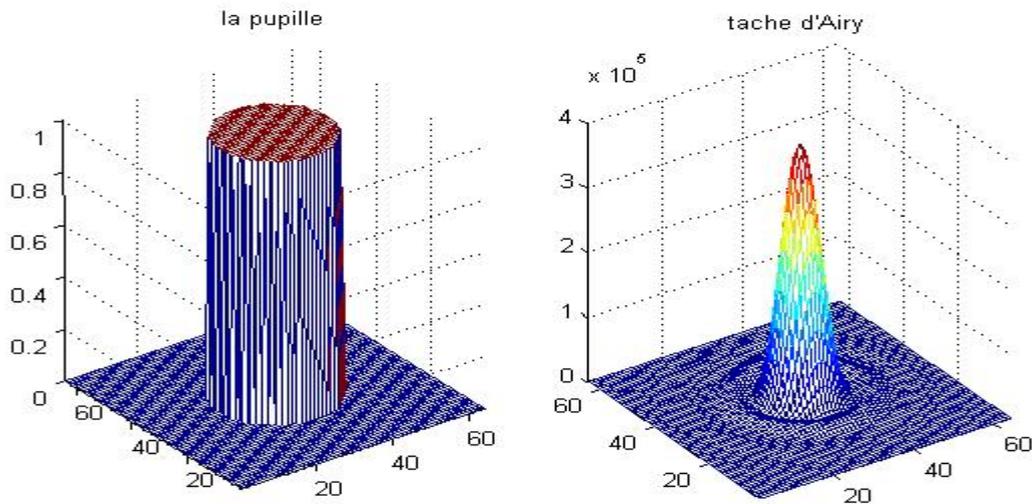


Figure (2.1) : la représentation de la fonction pupille, et sa transformée de Fourier qui est la tâche d'Airy.

2.1.5 Réponse du système optique en présence de la turbulence atmosphérique :

A la traversée de l'atmosphère, les fronts d'ondes subissent une dégradation causée par les fluctuations de l'indice de réfraction. Celles-ci, étant liées à la phase, donnent lieu à des variations aléatoires de cette dernière, cela se traduit par l'agitation et la distorsion de l'image qui prend une forme granulaire dans le plan image de l'instrument d'observation, qui est illustrée dans l'expression donnant la fonction de transfert optique (FTO), équation (2.9), elle représente une figure de tavelures, en anglais «speckle» (figure (2.2)). Chaque grain du speckle a pour dimension la tache d'Airy λ/D , où D est le diamètre de la pupille et l'extension spatiale de cette figure de speckle est de dimension égale à λ/r_0 ; elle est appelée étalement de l'image dû à l'effet de la turbulence atmosphérique caractérisé par son paramètre de Fried r_0 .

Du fait de l'évolution aléatoire et rapide de la turbulence atmosphérique dans le temps et dans l'espace rendant l'approximation de l'invariance par translation non appropriée, il est impératif de considérer le cas isoplanétique.

Les observations en astronomie et les estimations théoriques ont montré que ce domaine est de l'ordre de quelques secondes d'arc.

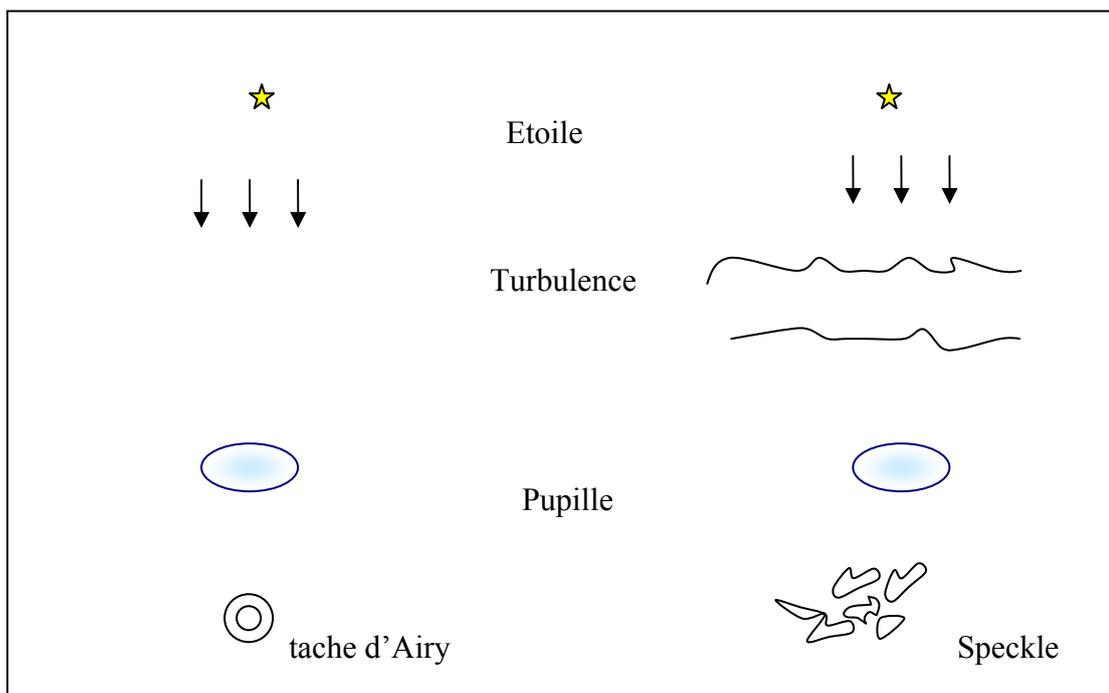


Figure (2.2) : formation de l'image dans les deux cas, avec turbulence et sans turbulence.

2.1.6. Image instantanée et image long temps de pose :

L'étude de la turbulence a mis en évidence les dégradations subies par les fronts d'ondes issus de l'objet lors de sa traversée de la perturbation atmosphérique : il y a une perte de cohérence temporelle, une diminution du domaine isoplanétique et une perte de cohérence spectrale. Ainsi, des tavelures se forment dans l'image, ayant un temps de vie de quelques millisecondes. L'imagerie classique, qui utilise un temps de pose largement supérieur, moyenne ces structures fines de l'image, d'où une perte de l'information en hautes fréquences car l'intensité observée en chaque point est l'intégration sur le temps de pose des intensités instantanées. Dans ce cas, la FTO est évidemment dégradée et sa fréquence de coupure est le diamètre r_0/λ , alors qu'en absence de perturbations, elle est égale à D/λ , où D représente la dimension maximale de la pupille ; donc ce n'est plus la dimension de la pupille qui limite la diffraction mais la turbulence, par son paramètre de Fried r_0 .

La fonction de transfert optique moyenne (ou long temps pose) qu'on appelle aussi, dans certains ouvrages, la fonction de transfert de speckle (FTS) est donnée par la moyenne de l'expression (2.9), [48] par :

$$\begin{aligned}
 FTS &= \langle T(f_x, f_y) \rangle \\
 FTS &= \frac{1}{\Pi} \iint P(x, y) P(x+u, y+v) \langle \psi(x, y) \psi^*(x+u, y+v) \rangle dx dy \\
 FTS &= \langle \psi(x, y) \psi^*(x+u, y+v) \rangle \cdot \frac{1}{\Pi} \iint P(x, y) P(x+u, y+v) dx dy
 \end{aligned}$$

qu'on peut écrire :

$$FTS = B(u, v) \cdot T_{instr}(u, v) \quad (2.11)$$

avec

$$B(u, v) = B(f_x, f_y) = \langle \psi(x, y) \psi^*(x+u, y+v) \rangle$$

L'équation (2.11) donne un résultat important : en long temps de pose, la fonction de transfert est le produit de la FTO du télescope et la fonction de transfert atmosphérique qui comme nous l'avons vu, dans le chapitre précédent, est la fonction de cohérence de phase alors, on peut écrire la fonction de transfert, dans le cas du champ proche, comme suit :

$$\langle \psi(x, y) \psi^*(x+u, y+v) \rangle = \langle \exp[\varphi(x, y) - \varphi(x+u, y+v)] \rangle$$

$$B_\varphi(\vec{\rho}) \equiv B_\varphi(\lambda \vec{f})$$

Comme il a été établi précédemment, en introduisant l'expression de la fonction de structure de la phase on écrit :

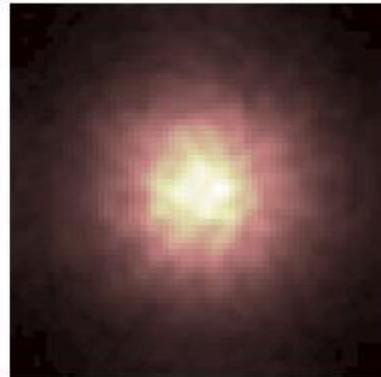
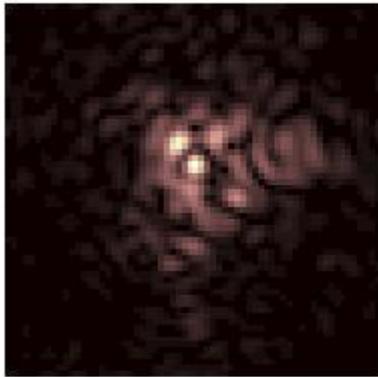
$$B_{\varphi}(\vec{f}) = \exp\left[-\frac{1}{2}D_{\varphi}(\vec{f})\right] = \exp-3.44\left(\frac{\lambda f}{r_0}\right)$$

$$T_{instr}(\vec{f}) = \frac{2}{\pi}\left(a \cos\left(\frac{\lambda f}{D}\right) - \frac{\lambda f}{D}\left(1 - \left(\frac{\lambda f}{D}\right)^2\right)^{1/2}\right) \quad (2.12)$$

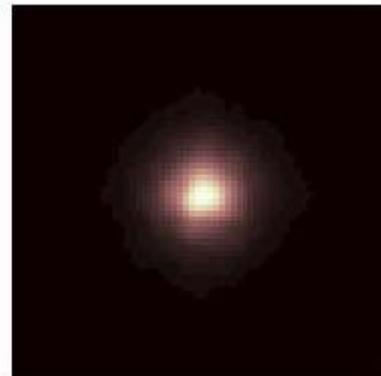
On suppose dans le calcul de $T_{instr}(\vec{f})$ que le télescope ne possède pas d'obstruction centrale. On remarque dans l'équation(2.11) que la longue pose a pour effet de moyenner les hautes fréquences qui étaient présentes dans la FTO instantanée ($B_{\varphi}(\vec{f})$) qui tend vers zéro très rapidement, dès que $f \geq r_0 / \lambda$, comme le montre la figure (2.3), où l'on a représenté des images obtenues par simulation d'un objet ponctuel dans les deux cas, court et long temps de pose. On remarque bien que pour le deuxième cas, on obtient une tâche dont le diamètre angulaire varie en fonction de la valeur de r_0 .

figures de speckles courte pose
($L_0=5m$, $D=0.25m$)

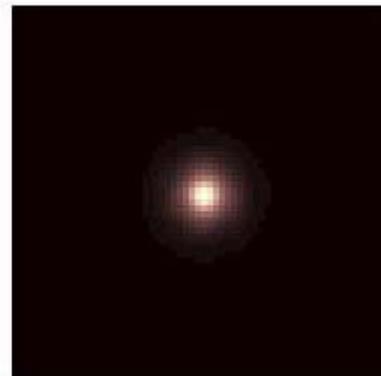
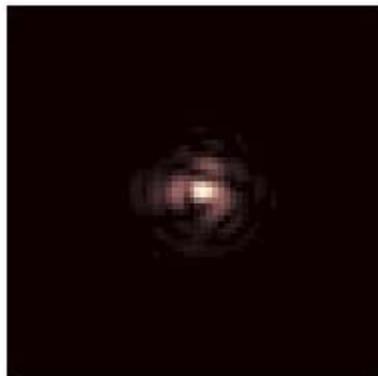
figures de speckles longue pose
($L_0=5m$, $D=0.25m$)



$r_0=0.01m$



$r_0=0.03m$



$r_0=0.05m$

Figure (2.3) : comparaison d'images obtenues par simulation entre la FTO instantanée et celle obtenue avec un long temps de pose où on remarque l'effet de moyenne des structures hautes fréquences et cela pour une longueur d'onde $\lambda = 548nm$

2.2. Etude du phénomène de l'agitation et de l'étalement :

Parmi les principaux effets des distorsions du front d'onde sur les images, on a l'agitation au foyer d'un télescope, celle-ci est due aux variations aléatoires de la phase et donc de l'angle d'arrivée moyen sur la pupille d'entrée du télescope [48] [49].

2.2.1. Fluctuation des angles d'arrivée AA:

Défini comme la normale en chaque point de la surface d'onde dégradée par la turbulence, l'angle d'arrivée, témoignera de ses caractéristiques d'où le but de notre étude. On peut montrer que dans les directions x et y les composantes de l'angle d'arrivée, pour une pupille finie circulaire de diamètre D seront données par [48]:

$$\alpha(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_0(x, y)$$

$$\beta(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \varphi_0(x, y)$$

après diffraction à travers la pupille on a :

$$\alpha(x, y) = -\frac{4\lambda}{2\pi^2 D^2} G(x, y) * \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\beta(x, y) = -\frac{4\lambda}{2\pi^2 D^2} G(x, y) * \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

où G(x, y) représente la transmission en amplitude complexe de la pupille et $\varphi_0(x, y)$ la phase de l'onde arrivant au sol.

2.2.2. La densité spectrale des fluctuations de l' AA ($W_\alpha(f_x, f_y)$) :

Cette dernière peut être donnée sous forme d'un produit de la DSP et la PSF qui traduit le filtrage de la pupille. On aura donc comme expression de la densité spectrale des fluctuations d'angle d'arrivée :

$$W_\alpha(f_x, f_y) = \lambda^2 f_x^2 \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 W_\varphi(f_x, f_y). \quad (2.14)$$

Le terme en valeur absolue représente le filtrage par la pupille. Pour simplifier l'étude on considère que celle-ci est circulaire et sans obstruction centrale. Dans ce qui suit en

prendra comme expression de la DSP celle de Von Kàrmàn, en négligeant le facteur en l_0 et en remplaçant dans l'expression de $W_\alpha(f_x, f_y)$ on aura :

$$W_\alpha(f_x, f_y) = 0.3827 \cos^{-1}(\gamma) \int_0^{h_{\max}} C_n^2(h) dh f_x^2 \left[f^2 + \frac{1}{L_0^2(h)} \right]^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 \cos^2(\lambda \pi h f^2) \quad (2.15)$$

2.2.3. La fonction de structure des fluctuations d'AA :

on écrit la fonction exprimant la cohérence spatiale des fluctuations d'AA entre deux points, qui ne dépend que de la distance les séparent, cette fonction est celle qu'on va mesurer est qu'on a défini précédemment, par la fonction de structure:

$$D_\alpha(x, y) = 2 [B_\alpha(0, 0) - B_\alpha(x, y)] \quad (2.16)$$

Avec $B_\alpha(x, y)$ représente la covariance au point $M(x, y)$ celle ci n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale des fluctuations de la phase, par suite on peut, après développement, en faisant un changement de variable en coordonnées polaire, écrire la fonction de structure tel que [48] [49] :

$$D_\alpha(r, \phi) = 2.404 \cos^{-1}(\gamma) \int_0^{h_{\max}} C_n^2(h) dh \int_0^\infty df f^3 \left[f^2 + \frac{1}{L_0^2(h)} \right]^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 \cos^2(\lambda \pi h f^2) \\ [1 - J_0(2\pi f r) + \cos(\phi) J_2(2\pi f r)] \quad (2.17)$$

On peut distinguer deux types d'agitation :

➤ Agitation longitudinale, Si $\phi = 0$:

$$D_\alpha(r, 0) = 2.404 \cos^{-1}(\gamma) \int_0^{h_{\max}} C_n^2(h) dh \int_0^\infty df f^3 \left[f^2 + \frac{1}{L_0^2(h)} \right]^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 \cos^2(\lambda \pi h f^2) \\ [1 - J_0(2\pi f r) + J_2(2\pi f r)] \quad (2.18)$$

➤ Agitation transversale, si $\phi = \frac{\pi}{2}$:

$$D_\alpha\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 2.404 \cos^{-1}(\gamma) \int_0^{h_{\max}} C_n^2(h) dh \int_0^\infty df f^3 \left[f^2 + \frac{1}{L_0^2(h)} \right]^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 \cos^2(\lambda \pi h f^2) \\ [1 - J_0(2\pi f r) - J_2(2\pi f r)] \quad (2.19)$$

Dans notre étude on s'intéressera à la fonction de structure angulaire transverse et qui aura comme expression en posant $\vec{r} = h \vec{\theta}$ dans l'expression précédente :

$$D_{\alpha}(\theta) = 2.404 \cos^{-1}(\gamma) \int_0^{h_{\max}} C_n^2(h) dh \int_0^{\infty} df f^3 \left[f^2 + \frac{1}{L_0^2} \right]^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi f D)}{\pi f D} \right|^2 \cos^2(\lambda \pi h f^2) \quad (2.20)$$

$$[1 - J_0(2\pi f h \theta) + J_2(2\pi f h \theta)] .$$

2.2.4 Etude du phénomène de l'étalement :

Sur les images obtenues en long temps de pose, l'intensité observée en chaque point, est l'intégration sur le temps de pose des intensités instantanées. Dans le cas d'une source ponctuelle cela se traduit par l'obtention d'une tache, dans le plan image, qui a pour diamètre angulaire λ/r_0 figure (2.4). Ce phénomène qui est l'étalement, est l'un des problèmes qui affectent les images obtenues dans le plan focal d'un instrument optique, comme l'agitation, étant donné que c'est lié à la turbulence (il dépend de r_0) alors, cela pourrait nous informer de ses caractéristiques [27][6].

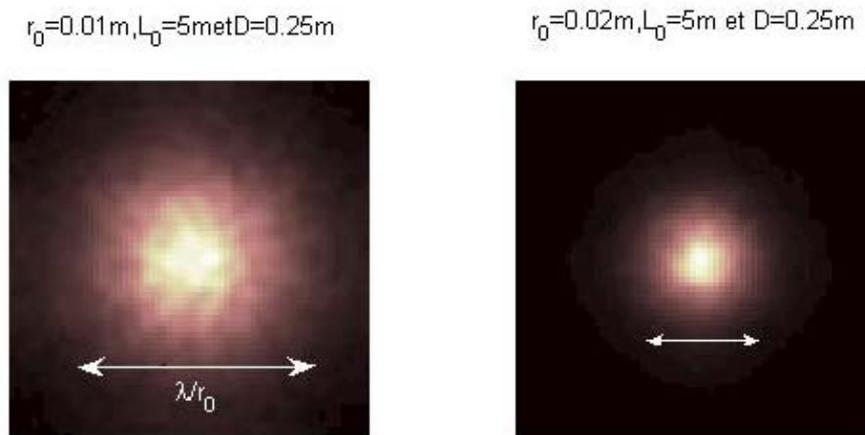


Figure (2.4) : si on considère d_0 le diamètre angulaire de la tache dont $r_0=1\text{cm}$ on remarque que pour un r_0 deux fois plus grand on obtient une tache de diamètre égal à $d_0/2$.

Relation entre FWHM et le paramètre de Fried :

Le diamètre angulaire de la réponse impulsionnelle long temps de pose en présence de turbulence atmosphérique, n'est rien d'autre que la largeur à mi-hauteur (Full Width at Half Maximum) de la courbe en intensité de la $FTS \equiv B(\vec{f})T(\vec{f})$. Elle est liée au paramètre de Fried par la relation obtenue numériquement dans le modèle de Kolmogorov (figure (2.5)):

$$FWHM \approx 0.976 \lambda / r_0 (\lambda) \quad (2.21)$$

Cette relation n'est valable que dans le cas où le diamètre de la pupille d'entrée, est très grand devant r_0 . Dans le cas contraire la résolution de notre système sera limitée par la diffraction et le diamètre angulaire de la $PSF \equiv T(\vec{f})$ dépendra uniquement de D et de la longueur d'onde (figure (2.5)) :

$$FWHM \approx 1.22 \lambda / D \quad (2.22)$$

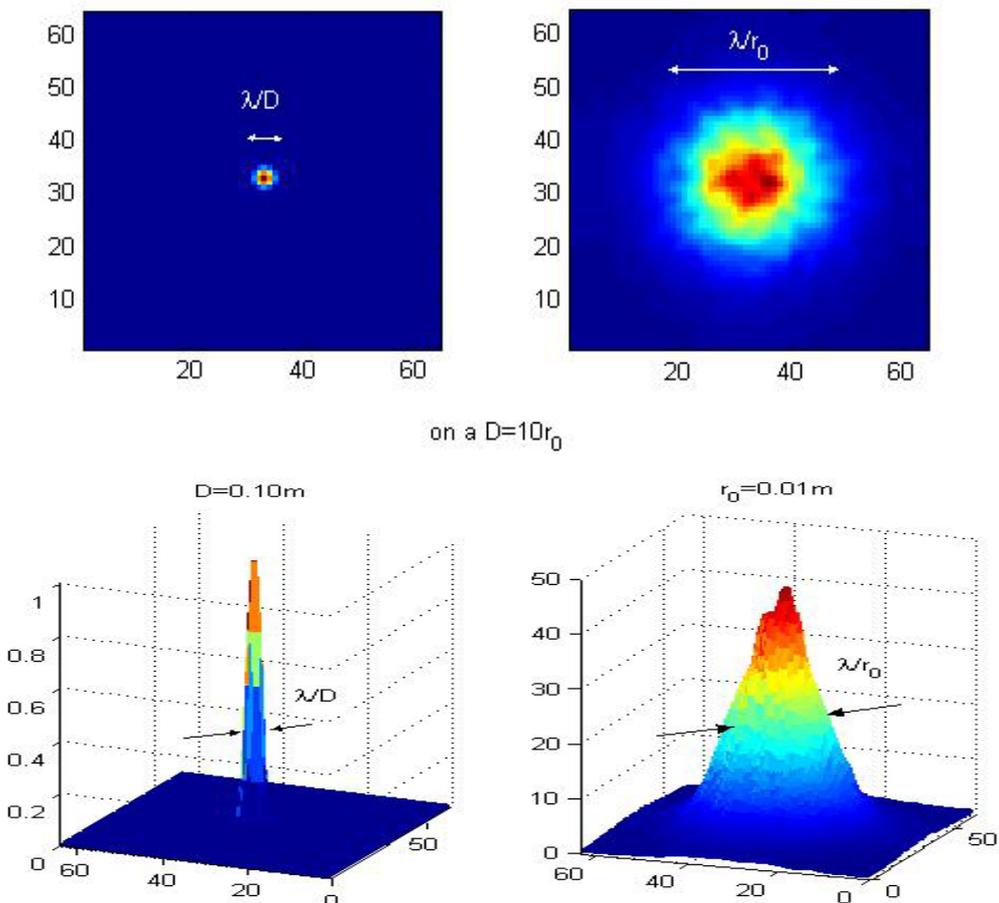


Figure (2.5) : l'étalement de la psf en long temps de pose dans les deux cas avec et sans turbulence.

Signification du paramètre de Fried :

Des deux relations (2.21) et (2.22), on peut en conclure que le paramètre de Fried peut être interprété comme le diamètre que devrait avoir un télescope hors atmosphère, pour que sa résolution soit équivalente à celle d'un télescope de diamètre infini, en présence de la turbulence atmosphérique. De manière plus explicite il exprime une limite de résolution que peut avoir un télescope quel que soit son diamètre D dans des conditions de turbulence donnée, et pour une longueur d'onde donnée. Il s'agit d'un paramètre chromatique (dépendance en longueur d'onde $\lambda^{6/5}$) [48].

Le seeing :

On définit un autre paramètre pour exprimer la netteté des images formées à travers la turbulence atmosphérique, le seeing [48] donné par la relation :

$$s = \lambda / r_0 \quad (rd) \quad (2.23)$$

Celui là, contrairement au paramètre de Fried, peut être considéré comme étant achromatique, car sa dépendance en longueur d'onde est faible ($\lambda^{-1/5}$). Il représente le diamètre angulaire apparent d'un objet ponctuel situé à l'infini qu'on peut calculer, en long temps de pose, directement du diamètre à mi-hauteur de la réponse impulsionnelle. Il est clair que, plus grand est r_0 , meilleure est la visibilité des objets à observer.

On en déduit que ces deux derniers paramètres sont les plus importants dans la détermination des conditions d'observation.

2.2.5. Etude du phénomène de scintillation :

Afin de simplifier notre étude, les fluctuations de l'intensité lumineuse ont, jusque là, été ignorées, pourtant ce phénomène est une véritable source d'erreurs pour l'imagerie à haute résolution angulaire. Connue sous le nom de la scintillation, elle est due aux fluctuations de l'amplitude de l'onde qui arrive au sol. Cette variation d'intensité est due au fait que les rayons diffractés à travers la turbulence vont interférer les uns avec les autres, loin de la zone de Fresnel où le champ proche n'est plus valable comme approximation. La scintillation peut être observée à l'œil nu comme la brillance des étoiles en particulier celles qui sont plus proches de l'horizon. On peut remarquer aussi le changement de couleur d'une seule étoile de manière continue, le phénomène est donc chromatique. L'effet de scintillation peut être quantifié en utilisant l'expression de la densité spectrale de fluctuation de l'amplitude complexe dans le modèle de Kolmogorov en utilisant (1.47) elle est donnée par [48]:

$$W_{\chi_0}(\vec{f}) = 0.3827 \lambda^{-2} \int C_n^2(h) \delta h f^{-11/3} (\sin \pi \lambda h f^2)^2 \quad (2.24)$$

Le spectre de puissance W_I des fluctuations d'intensité I se déduit de celui des fluctuations du logarithme de l'amplitude :

$$W_I(\vec{f}) = 4.W_x(\vec{f}) \quad (2.25)$$

En appliquant le théorème de Wiener –Kinchine, on obtient la variance de la scintillation tel que [48] :

$$\sigma_I^2 = 8\pi \times 0.3827 \lambda^{-2} \int dh C_n^2(h) \int f^{-8/3} (\sin \pi \lambda h f^2)^2 df \quad (2.26)$$

Si l'on considère l'angle de visée, la hauteur devient $h \cdot \cos \gamma^{-1}$ et en posant la variable adimensionnelle $u = \pi \lambda h f^2 / \cos \gamma$ on obtient :

$$\sigma_I^2 = 12.47 \lambda^{-7/6} \cos \gamma^{-11/6} \int dh C_n^2(h) h^{5/6} \int u^{-11/6} (\sin u)^2 du \quad (2.27)$$

$$\sigma_I^2 = 19.11 \lambda^{-7/6} \cos \gamma^{-11/6} \int dh C_n^2(h) h^{5/6} \quad (2.28)$$

notons que σ_I^2 est d'autant plus faible que la turbulence est proche du sol, à cause de sa dépendance en $h^{5/6}$; aussi la scintillation est plus importante lorsque l'on observe des objets loin de la direction zénithale (proche de l'horizon). On définit ainsi, le taux de scintillation comme le rapport $\sigma_I^2 / \langle I \rangle$ avec $\langle I \rangle$ représente l'intensité moyenne. Dans l'espace où la turbulence n'existe pas, les étoiles sont fixes et paraissent plus éclatantes, n'étant pas affaiblies par l'atmosphère.

2.3. Détermination du paramètre de Fried :

Sachant qu'il apparaît dans toutes les expressions traduisant les différents effets dus à la turbulence, tel que l'agitation, l'étalement et la scintillation, il peut être déduit en mesurant et quantifiant ces effets. Plusieurs méthodes ont été en effet, utilisées dans ce sens en tenant compte du domaine de validité de chaque méthode. Celui-ci étant dépendant des contraintes expérimentales, en plus de celle imposées par la physique du problème en question. On verra plus loin que le choix d'une méthode ou une autre est très lié à la nature de la turbulence atmosphérique, ainsi que d'autres grandeurs telles que (la longueur d'onde, temps d'exposition...etc.).

2.3.1 Détermination de r_0 en utilisant l'agitation :

Si on reprend l'expression donnant la variance des fluctuations d'AA dans une direction qu'on prendra x par exemple et qui est reliée à la densité spectrale par :

$$\sigma_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} W_\alpha(\vec{f}) d\vec{f} \quad (2.29)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \int_0^{+\infty} W_\alpha(\vec{f}) f df \int_0^{2\pi} d\theta \quad (2.30)$$

En remplaçant la densité spectrale $W_\alpha(\vec{f})$ par son expression en fonction de la densité spectrale de la phase $W_\varphi(\vec{f})$ (2.14) on écrit:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \lambda^2 \int_0^{+\infty} df \int_0^{2\pi} d\theta f f_x^2 \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 W_\varphi(\vec{f}) \\ &= \lambda^2 \int_0^{+\infty} df f^3 \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{\pi fD} \right|^2 W_\varphi(\vec{f}) \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

en remplaçant $W_\varphi(\vec{f})$ par son expression donnée selon le model de Kolmogorov (1.49), en considérant l'hypothèse du champ proche :

$$\sigma_\alpha^2 = \pi 0.3827 \cos^{-1} \gamma \int dh C_n^2(h) \int_{L_0^{-1}}^{+\infty} df \cdot f^{-2/3} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{(\pi fD)} \right|^2 \quad (2.32)$$

en fonction de r_0 (1.57) on écrit :

$$\sigma_\alpha^2 = 0.0229 \pi \lambda^2 r_0^{-5/3} \int_{L_0^{-1}}^{+\infty} df \cdot f^{-2/3} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{(\pi fD)} \right|^2 \quad (2.33)$$

faisons le changement de variable $u = \pi fD$, et en supposant que L_0^{-1} peut être négligée devant D^{-1} dans l'intégrale, elle peut être résolue analytiquement [48] [27] [6] :

$$\sigma_\alpha^2 = 0.0229 \pi \lambda^2 r_0^{-5/3} [2.361 D^{-1/3}]$$

$$\sigma_\alpha^2 = 0.1698 \lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3}$$

On aura donc l'expression finale donnant le paramètre de Fried en fonction de la variance des fluctuations de l' AA dans le modèle de Kolmogorov :

$$r_0 = 0.3451 \lambda^{6/5} D^{-1/5} (\sigma_\alpha^2)^{-3/5} \quad (2.34)$$

La variance dans cette formule est prise en (rd²), on verra plus loin que la formule utilisée généralement est donnée par [8] :

$$r_0 = 8.25 \times 10^5 \lambda^{6/5} D^{-1/5} (\sigma_\alpha^2)^{-3/5} \quad (2.35)$$

où la variance est donnée en seconde d'arc. L'agitation ne dépassera pas quelques secondes d'arc.

En remplaçant cette fois ci l'expression de la densité de la phase par celle donnée par Von Kàrmàn alors, l'équation (2.33) devient :

$$\sigma_\alpha^2 = 0.0229 \pi \lambda^2 r_0^{-5/3} \int_0^{+\infty} df \cdot f^3 (f^2 + L_0^{-2})^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{(\pi fD)} \right|^2 \quad (2.36)$$

Cette intégrale n'ayant pas de solution analytique on peut toujours la résoudre numériquement.

2.3.2 Détermination de r_0 en utilisant l'étalement :

Pour déterminer le paramètre de Fried en utilisant le phénomène d'étalement sur les images longue pose on utilise la relation (2.21) qui lie la largeur à mi hauteur (grandeur mesurable) au paramètre de Fried :

$$FWHM \approx 0.976 \lambda / r_0 (\lambda) \quad (2.37)$$

Sachant que cette relation donnée dans le modèle de Kolmogorov n'est valable que lorsque la turbulence est assez importante pour que les effets de diffraction à travers la pupille ne les masquent pas c'est-à-dire pour :

$$r_0 \ll D$$

Pour cela on a supposé, bien entendu, que tous les autres paramètres caractérisant la turbulence, sont connus et constants ; ce qui constitue une étude très approximative mais qui reste valable dans notre cas. Ces paramètres sont en réalité dépendant les uns des autres de façon non linéaire, il est donc possible de caractériser les conditions de turbulence, dans lesquelles ont été faites les mesures réelles, et de construire des modèles numériques qui nous permettent de remonter aux valeurs exactes de chaque paramètre.

2.3.3 Détermination des différents paramètres caractéristiques (méthodes d'inversion) :

Si on prend les grandeurs mesurables, par exemple la fonction de structure des fluctuations de la phase, ou de l'angle d'arrivée, on remarque que celle-ci est donnée en fonction de plusieurs paramètres caractéristiques de cette turbulence, tel que la constante de structure, la hauteur de la couche h ou encore l'échelle externe qui sont inconnus et dépendants entre eux de manière non linéaire, pour les déterminer il faut donc utiliser les méthodes d'inversion non linéaire.

2.4. Le bord solaire.

Bien que le diamètre solaire apparent ait été mesuré plus ou moins régulièrement depuis trois siècles environ, on sait peu de choses sur ses variations séculaires et/ou périodiques et le sujet est encore très controversé [56].

Il est vrai que les mesures du diamètre avec une grande précision sont difficiles. Mais des techniques appropriées de mesure, puis de réduction de données et enfin de traitement du signal peuvent permettre une détection de ses variations. Le problème est de relier les variations observées aux variations "vraies" du diamètre.

Pourquoi mesurer le diamètre solaire : Le diamètre était auparavant un sous-produit de mesures des paramètres orbitaux. Kepler par exemple, en 1600, déduit de ses mesures hivernales et estivales du diamètre, l'excentricité de l'orbite terrestre. Au XVII^e siècle, les mesures du diamètre faites à plusieurs hauteurs au-dessus de l'horizon permettent la détermination de la réfraction atmosphérique. Actuellement, les instruments dédiés à la mesure du diamètre tentent de mettre en évidence ses possibles variations, les éphémérides et la réfraction étant supposés connus.

Variations "théoriques" du rayon :

Des variations mêmes très faibles du diamètre, seraient d'un grand intérêt astrophysique puisque les théories les plus simples de la structure stellaire ne prédisent aucune variation mesurable. Avec les limitations des modèles qui ne prennent pas en compte la rotation, le champ magnétique ou l'asphéricité, le seul changement attendu dans le diamètre du Soleil est celui prévu par l'évolution de l'étoile, c'est-à-dire de 2,9 cm par an étant donné son âge, sa composition et sa masse. Ainsi, depuis la formation du Soleil, le rayon aurait augmenté de $0,88 R_{\odot}$ à sa valeur actuelle alors que la luminosité serait passée de $0,72 L_{\odot}$ à sa valeur actuelle. Lors de cette évolution, la température effective n'aurait varié que de 95 K environ, contribuant peu à l'évolution de la luminosité. Celle-ci et le rayon sont donc intimement liés tout au moins par la théorie. Ainsi, puisque les mesures de l'irradiance solaire montrent une variation de l'ordre de 0,1 % sur le cycle solaire, le rayon mesuré devrait lui aussi varier. Cependant, sa variation n'est détectable que si elle est de 5 à 6 ordres de magnitude supérieurs aux 2,9 cm par an prédits par la théorie. Une telle variation relèverait par conséquent d'un processus différent de celui de l'évolution nucléaire. Les processus susceptibles d'impliquer une variation observable du diamètre sont en fait nombreux et leur importance relative est controversée [56].

2.4.1 Le modèle du limbe (assombrissement centre bord):

Le Soleil étant une sphère gazeuse, sa projection sur le ciel est un disque dont l'intensité décroît du centre au bord ce qui a pour effet de rendre le bord solaire relativement flou. Ce phénomène, révélé de façon indiscutable par la première photographie du Soleil en 1845, est connu sous le nom de la fonction d'assombrissement centre-bord. Cet effet reflète l'existence d'une variation de température T et de pression P en fonction de l'altitude z dans l'atmosphère solaire. Dans une première approche on peut négliger les variations horizontales de T et de P . Une première mise en évidence d'un gradient de température

dans l'atmosphère solaire est l'assombrissement centre bord ("limb darkening"). Au voisinage du centre, le disque solaire est plus brillant qu'au voisinage du limbe parce que l'on voit des couches plus profondes lorsque l'on observe normalement à la surface que lorsque l'on observe près du limbe où la ligne de visée fait un grand angle avec la normale à la surface ce qui augmente considérablement l'absorption. Les mesures expérimentales de l'intensité de chaque point du disque solaire ont été traitées et approximées par des formules de fonctions d'assombrissement centre-bord diverses mais toutes sous une forme empirique. A la surface du soleil $z=0$ cette approximation donne une variation d'intensité en fonction de $\mu = \cos\theta$ où θ représente la coordonnée polaire d'un point donné de la surface solaire (figure 2.6). Cependant la comparaison des résultats avec les observations montre que les modèles sont satisfaisants au voisinage du centre du disque, c'est à dire à grande profondeur mais qu'ils sont en échec près du limbe (à une profondeur plus faible), raison pour laquelle on fait une extrapolation du modèle en approchant le bord, cela ne posera pas de problème dans notre étude puisque on ne s'intéresse pas à la modélisation de l'atmosphère solaire mais on veut déterminer l'effet de la turbulence atmosphérique de notre planète sur les images du bord [12] [56] [23].

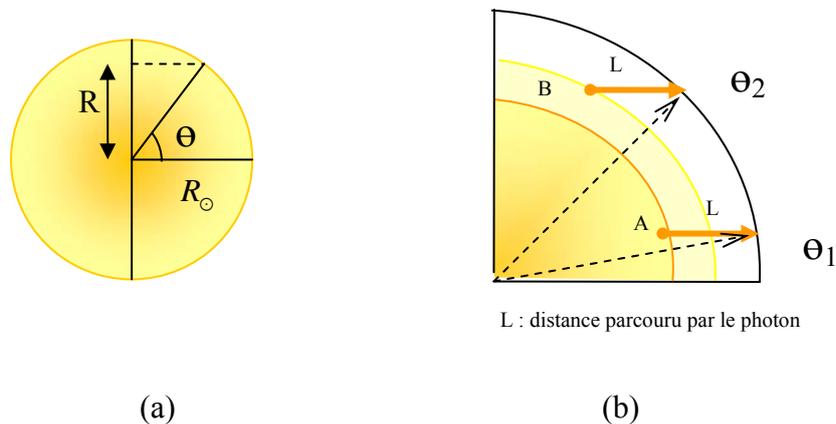


Figure (2.6) (a) : schéma montrant la géométrie du problème de l'assombrissement centre-bord. (b) : cette figure montre que pour un instant donné, l'observateur va voir à l'angle θ_1 , proche du centre, le photon émergeant du point A qui se trouve à une distance L de la surface solaire, alors que pour cette même distance le photon observé à un angle θ_2 , proche du bord, provient d'une couche supérieure (point B) qui est moins dense et plus froide donc plus on s'éloigne du centre plus l'intensité lumineuse diminue.

De plus, la fonction d'assombrissement observée dépend de la longueur d'onde. Il en résulte que le diamètre observé dépend lui aussi de la longueur d'onde (le diamètre observé aux longueurs d'onde radio est environ huit fois plus grand que celui observé aux longueurs d'onde du domaine visible). La méconnaissance de la fonction d'assombrissement induit aussi des incertitudes lors de la détermination du diamètre [43] [32][54].

A cause de la symétrie de révolution du soleil on prendra juste une zone de l'image pour effectuer notre étude. Cela correspond à un champ angulaire de quelques dizaines de secondes d'arc et une profondeur de 20 km sur le bord solaire (figure 2.6c)

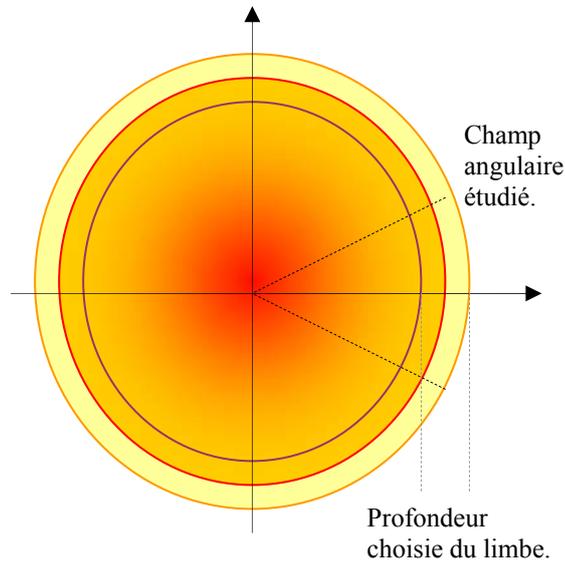


Figure (2.6) c : *partie étudiée du Soleil*

On définit le bord du disque solaire par le point d'inflexion de la courbe $I(R)$ donnant l'intensité lumineuse en fonction de la distance au centre. Ce bord solaire est défini avec une grande précision à $959.53''$ à partir du centre, pour ce qui suit on prendra $R_{\odot} = 960''$ comme valeur moyenne du rayon solaire, au dessus de ce point l'intensité tombe déjà à $1/1.000.000$ de l'intensité au centre du disque. On comprend pourquoi il est impossible d'observer normalement autre chose que la photosphère, la chromosphère étant cachée par l'éclat du ciel dont la brillance, même par très beau temps, est de l'ordre de $1/1.000.000$ de celle du disque solaire. Cette circonstance explique l'aspect très net du bord solaire apparent. Les couches extérieures ne sont observables que pendant les éclipses, ou en utilisant des instruments spécifiques, les coronographes. Ajouter à cela, l'image du bord solaire perd de sa résolution à cause de la turbulence atmosphérique. Ainsi il est important de parler de *diamètre observé apparent*, pour le distinguer du *diamètre vrai*. Ce dernier serait la taille du disque solaire donné par une construction théorique du Soleil pour une certaine densité ou potentiel gravitationnel, à une longueur d'onde donnée. Le diamètre apparent est le résultat de mesures utilisant un instrument bien spécifique [28].

Approximation selon Neckel et Labs (1994) :

La fonction approximant le mieux l'assombrissement centre bord, est de la forme polynomiale de degré 5, telle que l'intensité $I(R)$ d'un point donné normalisée par rapport à sa valeur au centre du disque $I(0)$, sera donnée en fonction de $\mu = \cos\theta = \sqrt{1 - (R/R_\odot)^2}$ par [38][40] :

$$I_\lambda(R) / I_\lambda(0) = \sum_{k=0}^N a_k(\lambda) \cdot \mu^k \quad (2.38)$$

avec $a_k(\lambda)$ représente les coefficients du polynôme d'approximation [Neckel-Labs-94] qui satisfont à [38]:

$$\sum_{k=0}^N a_k(\lambda) = 1 \quad (2.39)$$

Le modèle d'Hestroffer et Magnan (1998) :

Utilisant les mêmes données expérimentales obtenues par Neckel et Labs, mais ajustées avec une autre loi empirique de forme plus simple et qui ne dépend que d'un seule paramètre qu'on appelle paramètre d'Hestroffer-Magnan, on a [25] [24]:

$$I_\lambda(\mu) / I_\lambda(0) = 1 - u(1 - \mu^\alpha) \quad \text{où} \quad u, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.40)$$

En posant $u = 1$ on obtient un meilleur ajustement des données expérimentales et la formule se simplifie à :

$$I_\lambda(\mu) / I_\lambda(0) = \mu^\alpha \quad (2.41)$$

Et donc en fonction de R on écrit :

$$I_\lambda(R) / I_\lambda(0) = (1 - (R / R_\odot)^2)^{\alpha/2} \quad (2.42)$$

Le paramètre α est déterminé en identifiant les deux équations(2.38) et(2.42). Ça revient à chercher la solution numérique qui va dépendre de la longueur d'onde [24].

Ces deux derniers modèles constituent un bon ajustement aux valeurs réelles (mesurées) de l'assombrissement centre bord, mais le deuxième étant plus simple alors ce sera le modèle qu'on utilisera dans notre étude. Sachant que les valeurs de α sont données par Neckel et Labs [24] pour des longueurs d'ondes données, on peut par interpolation obtenir la valeur qui correspondra à la longueur d'onde qui nous intéresse figure (2.7).

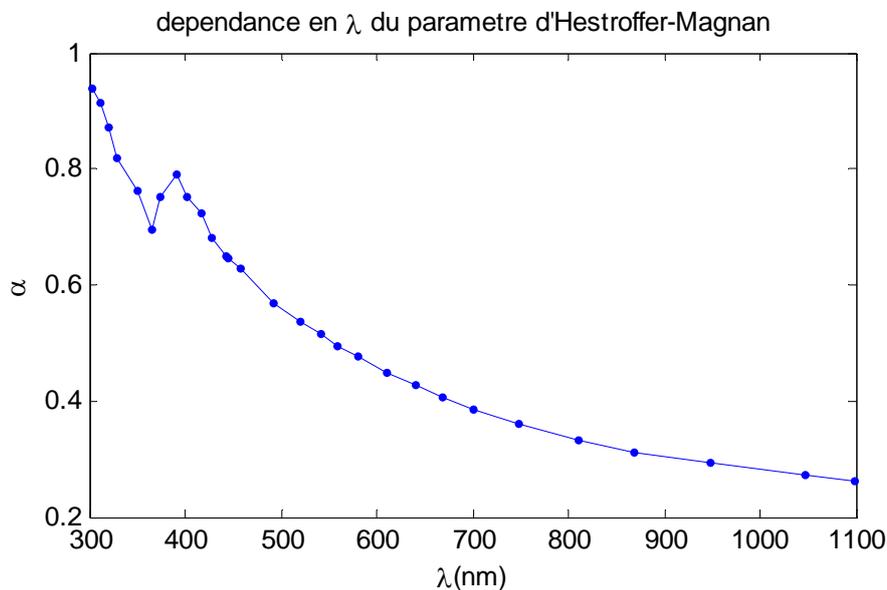


Figure (2.7) : De cette courbe on peut obtenir la valeur du paramètre d'Hestroffer- Magnan à la longueur d'onde utilisé dans notre étude.

2.4.1 Mesures du diamètre solaire :

Une information fiable concernant la variation du diamètre solaire ne peut être obtenue qu'à partir de longues séries de mesures, celles-ci ont été faites à partir d'un micromètre par Picard (de 1666 à 1682) et par la méthode de mesure du temps de transit du Soleil au méridien par La Hire (de 1683 à 1718) [56].

La série temporelle la plus intéressante est celle de Picard et La Hire qui ont observé avec le même instrument durant presque quatre cycles solaires. Pendant cette période, il y eut très peu de taches sur le Soleil. Connue sous le nom du minimum de Maunder en 1894, elle coïncide avec un climat relativement froid dans les régions de l'Atlantique Nord, il s'agit du petit âge glaciaire. Les données de La Hire de 1715 peuvent être comparées avec la mesure du diamètre effectuée lors d'une éclipse de Soleil par Halley et ses collaborateurs en mai 1715. La comparaison des mesures qui ont été faites, durant cette période, ont donné la valeur de 962.5" ce qui est de 3" (2000 km) supérieur à la valeur actuelle du diamètre. Cet écart correspond de plus à 6 fois la déviation standard de la moyenne et est 20 fois plus grand que la variation actuelle du diamètre avec le cycle de 11 ans (150 km). Par ailleurs les taches observées pendant cette même période (une centaine au total, concentrées sur l'hémisphère Sud du Soleil) montrent une vitesse de rotation de 3% plus

faible que la vitesse actuelle. Un Soleil plus grand avec une vitesse de rotation plus faible serait en accord avec un phénomène réel de pulsations (dilatation et contraction des couches convectives) sur des échelles de temps de quelques siècles. La connexion entre l'activité des taches, la luminosité et le diamètre a été suggérée par Spiegel et Weiss (1980). Dans les couches convectives profondes, la présence de champs magnétiques forts peut altérer localement le gradient de température et modifier le transport de flux convectif. Une telle altération provoquerait une variation du rayon et affecterait aussi le taux de rotation de l'enveloppe solaire.

Après Picard, les mesures continuèrent, mais en raison de la diversité des instruments utilisés, il est difficile d'extraire une tendance séculaire. Différentes méthodes furent et sont toujours utilisées dont il ne ressort pas de résultats cohérents. Les mesures ont été obtenues par différentes méthodes (passage au méridien, passage de Mercure devant le Soleil, astrolabes, télescopes imageurs, héliosismologie). Les périodes de mesures sont différentes et les mesures elles-mêmes ont été effectuées dans des domaines spectraux variables d'un instrument à l'autre et contenant des raies de Fraunhofer susceptibles de variations en fonction de l'activité chromosphérique. Qu'en est-il exactement ?

Si certaines mesures montrent un diamètre constant, d'autres une anticorrélation ou une corrélation avec l'activité solaire, des mesures hors atmosphère sont nécessaires pour déterminer si le diamètre varie en fonction de l'activité ou ne varie pas.

2.4.3 L'astrolabe solaire:



C'est un instrument de calcul inventé par Hipparque (astronome grec du 2^{ème} siècle avant J.C.) permettant d'établir les relations entre la position des étoiles et le temps. Fut développé par les Arabes qui l'appelaient « Al-Muquantara », d'usage limité pour les observations astronomiques. Il a servi beaucoup plus au calcul de l'heure le jour par l'observation du Soleil et la nuit par l'observation des étoiles. Il fut aussi le principal instrument de navigation du 17^{ème} au 19^{ème} siècle. Dans sa forme la plus simplifiée, il se compose de deux instruments, l'un qui mesure les hauteurs des astres et l'autre qui calcule l'heure; Depuis, cet instrument n'a cessé d'être actualisé et amélioré selon les besoins de l'astronome.

En 1951, Danjon lui apporte deux perfectionnements essentiels, réalisés simultanément par l'introduction d'un prisme biréfringent mobile, et l'élimination de l'effet d'obliquité des faisceaux lumineux, inhérent au dispositif primitif. Le prototype, a déjà la qualité requise pour que ses observations d'heure et de latitude soient utilisées par les organismes internationaux. L'astrolabe sert ensuite à l'amélioration des catalogues d'étoiles et à l'observation des planètes et de leurs satellites. En 1973 Leister (1977) à Sao Paulo (au Brésil) tente les premières observations solaires de même que Laclare (1975) en 1974 au CERGA. En 1980, ce dernier étend l'utilisation de l'astrolabe de Danjon en y introduisant plusieurs prismes et en 1991, il rend les mesures impersonnelles par l'emploi d'une caméra C.C.D.

Par suite plusieurs travaux ont été engagés dans ce sens là. On cite les expériences faites avec l'astrolabe solaire de l'Observatoire de Calern (Observatoire de la Cote d'Azur, Nice, France). Depuis son installation en 1975, des mesures du diamètre solaire ont été faites de façon régulière au début de manière visuelle [33] puis les performances de l'astrolabe ont été considérablement améliorées en introduisant les nouvelles techniques d'acquisition numérique d'images solaires et de réduction des observations du diamètre [26]

2.4.4 L'expérience DORaySol :

Dans le but d'atteindre une automatisation complète de l'astrolabe, on procéda à l'assemblage d'un nouvel instrument DORaySol (Définition et Observation du Rayon Solaire) C'est un instrument alt-azimutal qui fonctionne sur le principe de l'Astrolabe de Danjon, où toutes les réfractions (sauf le filtre) sont changées en réflexions [33].

Le principe de fonctionnement d'un astrolabe (figure 2.8) de façon générale consiste à former à l'aide d'un prisme et d'un bain de mercure, deux images du même objet. La première image est formée par les rayons de lumière qui traversent normalement la face supérieure du prisme puis subit une réflexion dans la direction normale à la partie supérieure de l'obturateur. Pour la seconde image, la lumière venant de l'astre observé subit une réflexion sur le bain de mercure avant de traverser la face inférieure du prisme et être focalisée par la partie inférieure de l'obturateur.

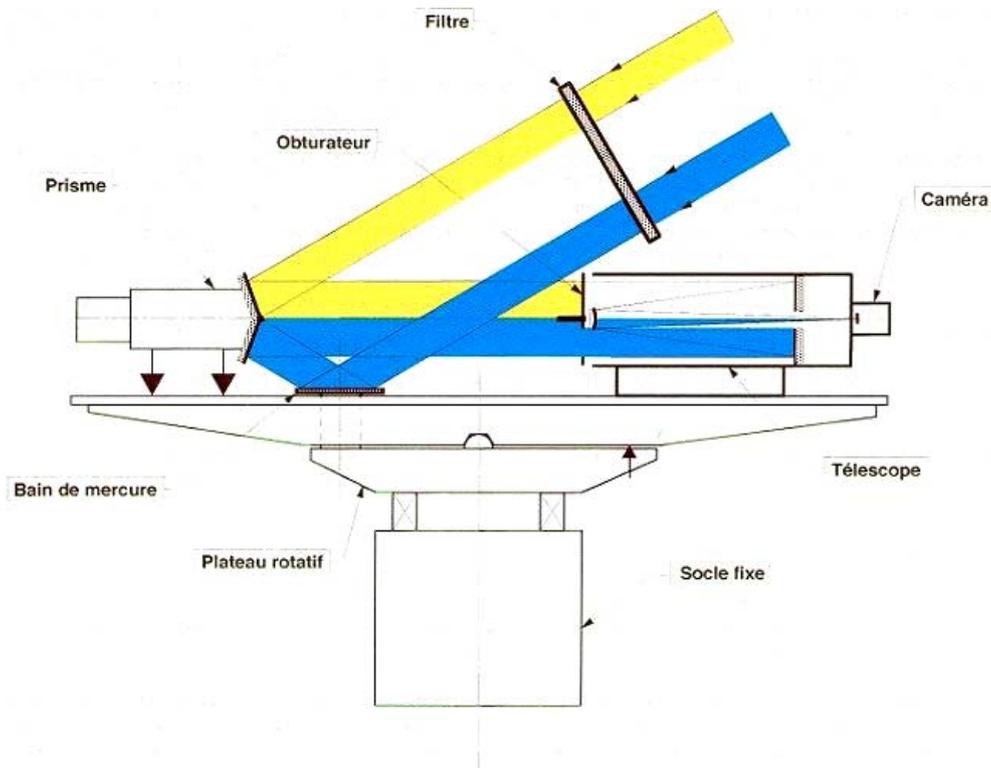


Figure (2.8) : Schéma donnant le dispositif expérimental de DORaySol.

Les éléments de l'instrument sont :

- 1 - une lame de densité qui ne laisse passer que la dix millièmes partie de la lumière du Soleil.
- 2 - un bain de mercure qui matérialise le plan de l'horizon (plan de référence).
- 3 - un prisme réflecteur d'angle variable, dont l'arête est horizontale et perpendiculaire à l'axe optique.
- 4 - un télescope qui forme dans son plan focal les deux composantes symétriques de l'image du bord solaire.
- 5 - une caméra CCD et son système d'acquisition numérique qui permettent de reconstruire le bord solaire et de déterminer l'instant de passage au cercle de hauteur.

Lorsque l'astre est dans le champ d'observation de l'instrument, les deux images se déplacent à la rencontre l'une de l'autre jusqu'à se confondre puis s'éloignent de nouveau. Lorsque les deux images obtenues se croisent au foyer de l'instrument, l'objet se trouve exactement à la hauteur définie par l'angle du prisme réflecteur. La mesure des instants de passage des deux bords successifs du disque solaire à un cercle de hauteur donné permet de déterminer la valeur de son diamètre angulaire.

L'observation visuelle à l'astrolabe solaire consiste à enregistrer l'instant de tangence des deux images (directe et réfléchi) du bord solaire, et de manière analogique en utilisant une caméra CCD, le diamètre du soleil est ainsi déduit de l'intervalle de temps séparant les passages de deux bords opposés par le même cercle de hauteur. Le réseau R2S3 est constitué par l'instrument de Calern, celui d'Alger (construction en 2002 de la copie conforme à installer à Tamanrasset dans le futur) et de Rio de Janeiro (même filtre que DORAYSOL, instrument différent utilisant un télescope déjà en place). La coopération franco-algérienne est assurée par des accords entre les deux pays.

Dans ce paragraphe on a juste parlé de manière sommaire du principe de formation de l'image dans les conditions auxquelles sont confrontées les expériences de mesure faites avec DORaySol puisque c'est cet instrument qui va fournir les données réelles et qui sont le sujet de cette étude, puis dans le prochain chapitre on passera à la simulation des images du bord solaire et des effets de la turbulence atmosphérique. On en reparlera dans le chapitre3 de cette thèse. Par ailleurs le but principal de cette thèse n'étant pas le calcul du diamètre solaire mais la détermination des effets de la turbulence atmosphérique sur les images du bord solaire, effets qui sont susceptibles de fausser la mesure du diamètre.

L'étude de la perturbation engendrée par l'atmosphère sur les images du bord permet de préciser, pour un lieu donné, les meilleures conditions d'observation, d'où la conception d'instruments servant de moniteur solaire pour caractériser les sites d'observation.

2.4.5 Le Moniteur d'Images Solaire Franco-Algérien (MISolFA) :

C'est dans ce contexte que des études basées sur l'analyse des variations observées dans les mesures du diamètre, sont menées par notre équipe et qu'une expérience sera mise en place à l'Observatoire de Tamanrasset pour fonctionner en parallèle avec la mission spatiale Picard. Cette expérience est développée pour fournir, également, la mesure des paramètres qui qualifient les conditions d'observation aux moments précis de la mesure du diamètre. L'objectif essentiel est la validation des observations du diamètre solaire faites au sol sur plus de 2 cycles solaires par celles qui seront faites dans l'espace. Pour cela, une mission spatiale (*Picard*) qui consistera au lancement en 2009 d'un microsatellite équipé d'une expérimentation pour la mesure du diamètre, a été initiée par le CNES français. Outre les mesures qui seront effectuées par le segment au sol (réseau international d'astrolabes, *DORaySol*), une expérimentation identique à *Picard* sera installée à Calern (*Picard sol*) ainsi qu'un moniteur de qualité d'images MISolFA qui donnera en permanence les informations liées aux conditions dans lesquelles ont été réalisées les observations (profils de turbulence, constantes de temps etc.). Ces informations serviront à cerner les effets de l'atmosphère terrestre sur les mesures du diamètre mais également à les raccorder à celles qui seront faites dans l'espace (hors atmosphère) [28].

La mission PICARD est programmée par le CNES sur la filière microsatellite. En dehors de ses objectifs de physique solaire, cette mission devrait apporter des résultats pour une meilleure connaissance de la contribution du Soleil aux variations climatiques terrestres. Le volet "atmosphère" de Picard a deux objectifs : Comparer la forme du Soleil observée depuis l'espace et le sol, et mesurer la variabilité ou la constante solaire. La vie du satellite étant limitée à deux ou quatre ans, il sera nécessaire de faire des mesures complémentaires après la fin de vie du satellite.

PICARD- Sol ou SODISM-II :

C'est un ensemble instrumental qui accompagne, au sol, la mission spatiale PICARD, pendant et après la durée de la mission. Il est constitué des instruments SODISM-II et MISOLFA. Il s'agit du modèle de rechange du télescope SODISM installé sur le satellite, que l'on va disposer sur une monture au plateau de Calern figure (2.9). Cet instrument, du fait de son installation au sol, aura une précision limitée par l'atmosphère terrestre [28].



Figure (2.9): *photo des deux instruments SODISM II et MISolFA montés à Calern, Observatoire de la Côte d'Azur.*

MISOLFA

Afin de mieux évaluer l'influence de l'atmosphère un instrument dédié à la mesure des paramètres atmosphériques MISOLFA va être installé à côté de SODISM II. L'expérience MISOLFA pourra modéliser l'influence de l'atmosphère sur les mesures du rayon par DORAYSOL. Cette mesure sera validée lorsque SODISM-I, le télescope de PICARD, et sa réplique au sol (Plateau de Calern) SODISM-II, fonctionneront simultanément avec MISOLFA et DORAYSOL. Pendant la vie du satellite on pourra comparer les différences entre SODISM-I et SODISM-II avec les mesures instantanées de MISOLFA. Ensuite MISOLFA aidera à interpréter les mesures faites par SODISM II et permettra, d'affiner ses mesures.

La comparaison d'un limbe solaire observé au sol et en orbite, montre le rôle de l'atmosphère. Le limbe observé au sol peut s'étaler sur plusieurs secondes d'arc. C'est pourquoi l'observation concomitante du diamètre en orbite et au sol permettra de séparer les variations d'origine solaire des variations d'origine atmosphérique.

Mais pour extraire l'information solaire d'une mesure au sol, il convient de comprendre tout le processus d'altération du limbe par diffusion et turbulence d'où la nécessité de la simulation dans notre étude. D'un autre côté, les mesures simultanées au sol et en orbite (PICARD) permettront de déduire l'effet intrinsèque de la turbulence puisque les mesures seront effectuées par deux instruments identiques. Si l'effet de l'atmosphère est facilement mis en évidence, il reste à le quantifier. Les conditions de turbulence seront mesurées par un instrument indépendant (MISolFA) permettant d'évaluer la dégradation du front d'onde induite par la turbulence atmosphérique, mais également par la connaissance de la localisation des couches turbulentes responsables de la dégradation des images (paramètre de Fried r_0 , échelle externe de cohérence spatiale L_0 , le domaine d'isoplanétisme Θ_0 , temps caractéristique d'évolution du front d'onde τ_0 et profil de turbulence $C_n^2(h)$). L'estimation de ces paramètres repose sur les modèles de turbulence (Kolmogorov, Von Kàrmàn, ...) [28].

Chapitre 3 :

La Simulation numérique

Introduction.

La simulation numérique des effets de la turbulence atmosphérique sur les images du bord que sont l'agitation et l'étalement, nous permet, non seulement, de comprendre ce qui se passe dans le cas réel mais de caractériser ces phénomènes par des paramètres qui ont été définis par les modèles théoriques de l'optique atmosphérique tel que le paramètre de Fried qui sera le sujet principal de notre étude.

Afin d'assurer une meilleure compréhension des étapes suivies dans la simulation il est important de rappeler quelques notions de base sur le traitement numérique de l'image.

La notion d'image :

Toute grandeur donnant une information d'intensité $I(x, y, t)$ dans l'espace et le temps est considérée comme une image si on fixe le temps. Elle peut alors être représentée par une matrice à deux dimensions dont le nombre de colonnes et de lignes représentent sa taille $(N_x \times N_y)$. On peut dire que l'image est une surface représentant la projection d'une source d'intensité (dans notre cas le bord solaire) comme un tableau de valeurs numériques de cette intensité [35].

Le pixel :

La fonction définissant une simple image est en principe, une fonction continue. Une image idéale est en effet formée d'une infinité de points géométriques. En revanche, toute image produite par un système physique ne possède qu'un nombre fini de régions distinctes. La photocathode d'une caméra vidéo est une mosaïque de récepteurs photoélectriques en silicium placés côte à côte, au nombre fini $(n \times p)$ d'éléments sensibles (récepteur dit CCD, ou Charge Coupled Device, en français, Dispositif à Transfert de Charge) appelés *pixel* (abréviation de *picture element*).

On spécifie alors la valeur de l'intensité contenue dans une image en indiquant pour chaque pixel $(i \times j)$, où i et j désignent la position ligne-colonne de l'image, et $I_{i,j}$ est l'intensité reçue par ce pixel [35].

L'échantillonnage de l'image :

Si la taille physique de l'objet observé est fixe, sa représentation ou son image peut être variable selon l'échantillonnage de cette image. On peut par exemple représenter un même objet avec deux images dont le nombre de pixels est différent on verra que celle qui a le plus grand nombre de pixel est la plus nette, il s'agit là donc de la résolution de l'image obtenue par simulation. Mais dans notre cas où on doit se mettre dans les conditions réelles dans lesquelles sont formées les images du bord l'échantillonnage sera défini comme la portion angulaire du ciel vue par un pixel du capteur CCD et ne dépend que de la taille physique du pixel (*longueur* × *largeur*) et la focale de l'instrument et il est souvent exprimé en secondes d'arc. L'échantillonnage E (en secondes d'arc par pixel) est lié à la taille du pixel P (en microns) et à la focale F (en mm) de l'instrument par la formule

$$E = 206 \times P / F_{ocl}$$

Exemple : à une focale de 2000 mm, l'échantillonnage sur un capteur KAF-0400 (pixels de 9 microns) est $E = 206 \times 9 / 2000 = 0.93'' / pixel$.

La même formule peut être utilisée pour déterminer la focale nécessaire pour atteindre un échantillonnage donné :

$$F_{ocl} = 206 \times P / E$$

Cependant les fronts d'ondes arrivant sur la pupille de l'instrument subissent une diffraction de Fraunhofer ; celle-ci étant circulaire on observe pour des objets ponctuels des tâches d'Airy dans le plan focal, de taille angulaire λ/D ce qui correspond en terme spectral à la fréquence de coupure de l'instrument $f_c = D/\lambda$ où D , est le diamètre de la pupille et λ est la longueur d'onde. Selon le théorème de Nyquist-Shannon, qui stipule que la fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal on a donc une limite d'échantillonnage [22] [53] [15]:

$$f_e \geq 2 f_c \Rightarrow E \leq E_{\max} = \lambda / 2D$$

C'est la valeur maximale qu'on peut donner au pas dans l'échantillonnage spatial.

En imagerie CCD, comme en photographie, où la pupille est fixe, ajuster la focale de l'instrument est de la plus grande importance pour pouvoir travailler avec l'échantillonnage le mieux adapté.

3.1. Simulation du bord solaire sans turbulence atmosphérique:

Pour cela, on utilise la fonction d'assombrissement centre bord de l'intensité lumineuse du soleil le long du rayon R normalisée par rapport à sa valeur au centre qui est définie selon le modèle d'Hestroffer – Magnan par l'équation (2.42) :

$$I_N(\lambda) = (1 - (R/R_\odot)^2)^{\alpha(\lambda)/2} \quad (3.1)$$

avec R_\odot le rayon moyen du soleil, retenu comme calibration angulaire dans la simulation du bord solaire.

3.1.1 Construction de l'image du bord solaire :

Paramètres de l'objet :

La longueur d'onde λ : on prendra comme exemple les longueurs d'onde avec lesquelles on observe dans le cas des mesurés avec DORaySol ou MISolFA mais cela ne nous empêche pas de prendre une autre valeur puisque le modèle utilisé est valable pour des longueurs d'ondes variant de 300nm à 2000nm [H&M, PSW, 98]. On présentera quelques valeurs utiles à notre étude dans ce tableau :

$\lambda(nm)$	(SODISM) 393.37	(MISolFA) 535.70	(DORaySol) 548.00	(SODISM) 607.00
α	0.5692	0.5183	0.5052	0.4641
$D(cm)$	9.00	25.40	10.00	9.00
$E_{\max} ("/ pixel)$	0.4510	0.2176	0.5655	0.6959

Le paramètre d'H&M α : comme on l'a déjà expliqué ce dernier est obtenu par interpolation pour la longueur d'onde correspondante :

Le rayon moyen est $R_\odot = 960''$.

Paramètres de l'image :

On prend la taille en pixel des images obtenues avec DORaySol et donc :

$$(N_x \times N_y) = (101 \times 256)$$

Échantillonnage angulaire de l'image (taille angulaire de chaque pixel) :

Pour cela on a pris en compte la taille réelle du pixel sur la CCD et la focale de l'instrument. Et en respectant le théorème d'échantillonnage on a pour longueur d'onde d'observation $\lambda = 548 \text{ nm}$, le diamètre de la pupille d'entrée 10 cm et pour une focale de l'astrolabe $F_{\text{opt}} = 3.5 \text{ m}$ un échantillonnage angulaire $d\theta_x = 0.56''$ dans la direction x, et $d\theta_y = 0.74''$ dans la direction y. La limite imposée par la diffraction dans ce cas là est de $d\theta_{\text{max}} = 0.57''$ mais dans notre simulation on prendra le même pas d'échantillonnage dans les deux direction x et y : $d\theta_x = d\theta_y = 0.4'' = 0.4 \times \pi / 180 / 60 / 60 \text{ rd}$

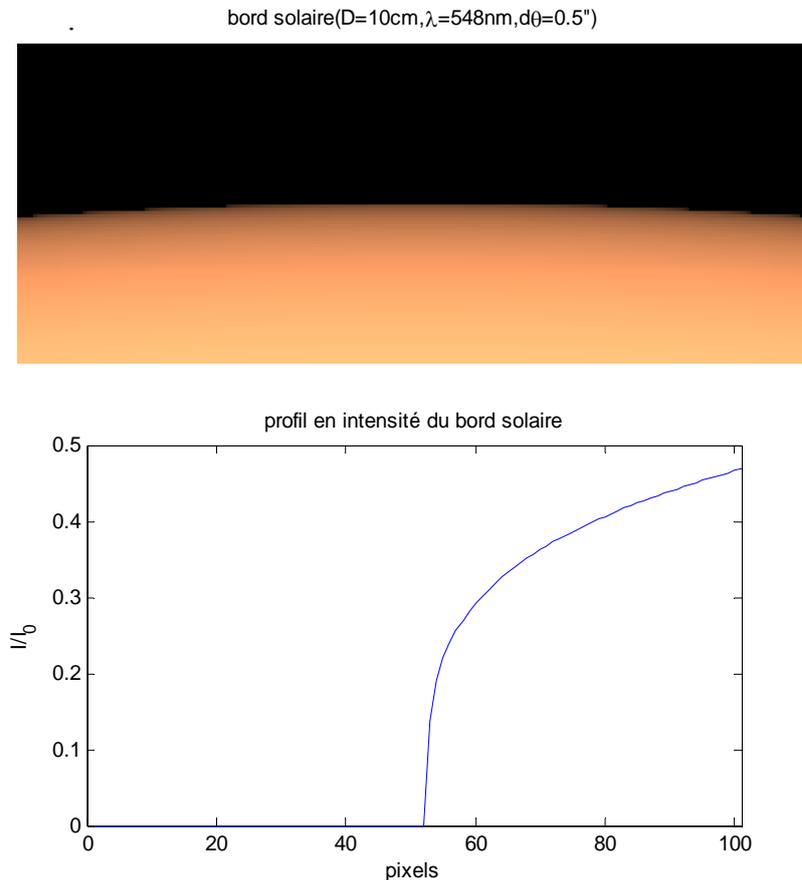


Figure (3.1), (a) image du bord obtenu par simulation avec $\lambda = 548 \text{ nm}$, $D = 25.4 \text{ cm}$, si on prend une coupe de cette image on a le profil en intensité du bord solaire non perturbé (b)

3.1.2 Le bord pour différentes longueurs d'ondes :

On voit sur la (figure 3.2) que la fonction d'assombrissement centre bord dépend de la longueur d'onde à laquelle on fait nos observations; Pour la simulation cela revient à prendre une valeur de λ fixe. Du point de vue théorique on est amené à supposer le cas monochromatique, par contre pour les mesures expérimentales où l'on utilise des filtres de longueurs d'onde qui, aussi parfaits qu'ils soient, laissent passer une bande spectrale de quelques nanomètres. Cependant on peut prendre en compte le cas polychromatique dans notre simulation en ajoutant l'effet du filtre spectral qu'on peut modéliser.

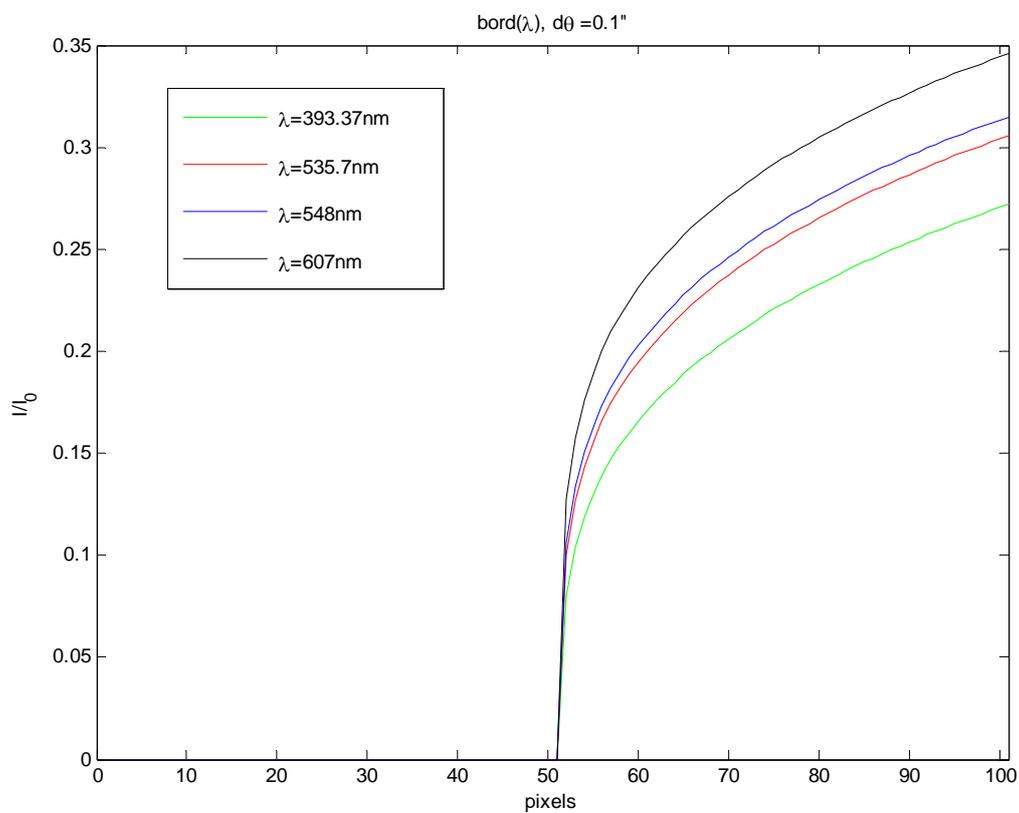


Figure (3.2) : la représentation donnant le profil en intensité du bord solaire pour différentes longueurs d'onde.

3.1.3 Le bord en fonction de l'échantillonnage :

Avant d'introduire les effets de la pupille et de l'atmosphère sur le bord solaire on remarque déjà que le choix du pas d'échantillonnage ne peut être arbitraire mais de manière très rigoureuse (figure 3.3). On verra plus loin que cela doit se faire avec plusieurs considérations théoriques et expérimentales.

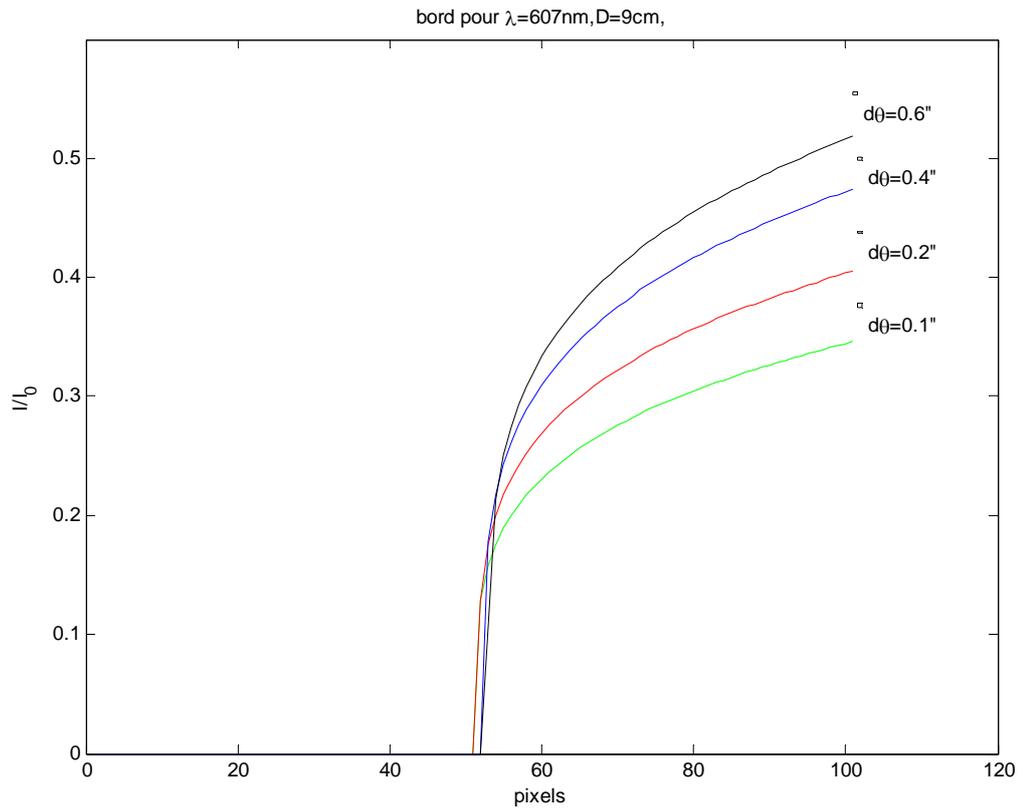


Figure (3.3): dans cette figure on a représenté le bord solaire pour différentes valeurs de l'échantillonnage.

3.1.4 Simulation du bord solaire vu à travers la pupille d'un télescope :

L'observation d'un objet à l'œil nu ou à travers tout instrument optique introduit un filtrage ; c'est la réponse du système optique et l'image obtenue est différente de l'objet original. Dans les cas les plus simples le passage à travers une pupille comme le cas de notre œil ou un télescope va introduire un filtrage qui se traduit par un produit de convolution de l'image de l'objet par la réponse du système qui dans le cas d'une pupille circulaire sera la tache d'Airy. Pour la simulation cela revient à multiplier chaque point de notre objet par la tache d'Airy (figure 3.4) :

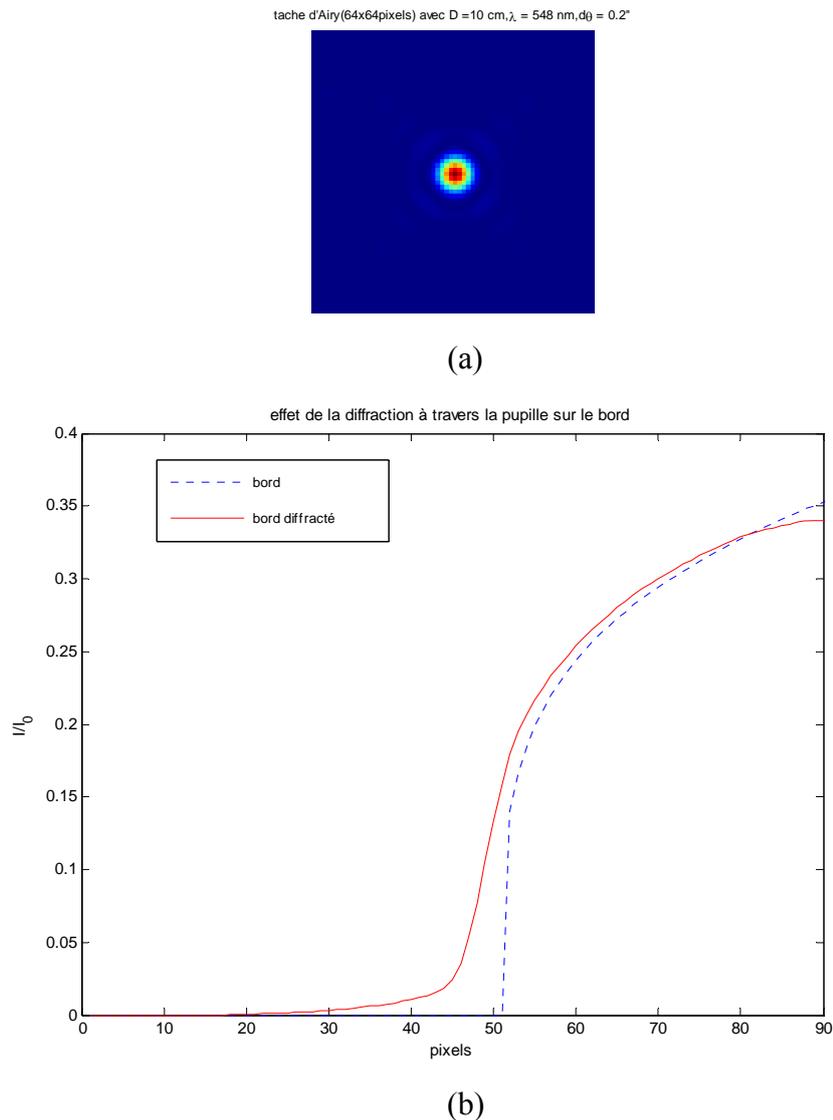


Figure (3.4) : l'image du bord convoluée par la tache d'Airy (a), on remarque l'étalement du bord à cause de la diffraction due à la pupille et l'apparition du point d'inflexion (b).

Si on représente l'image du bord après son passage à travers la pupille on obtient une image moins nette (floue) figure (3.5) cela se traduit par l'apparition du point d'inflexion sur le profil en intensité figure (3.4) et qui comme on l'a déjà expliqué va définir le bord solaire de manière plus explicite. La détermination du bord va dépendre de l'instrument utilisé en plus de la longueur d'onde à laquelle on va observer.

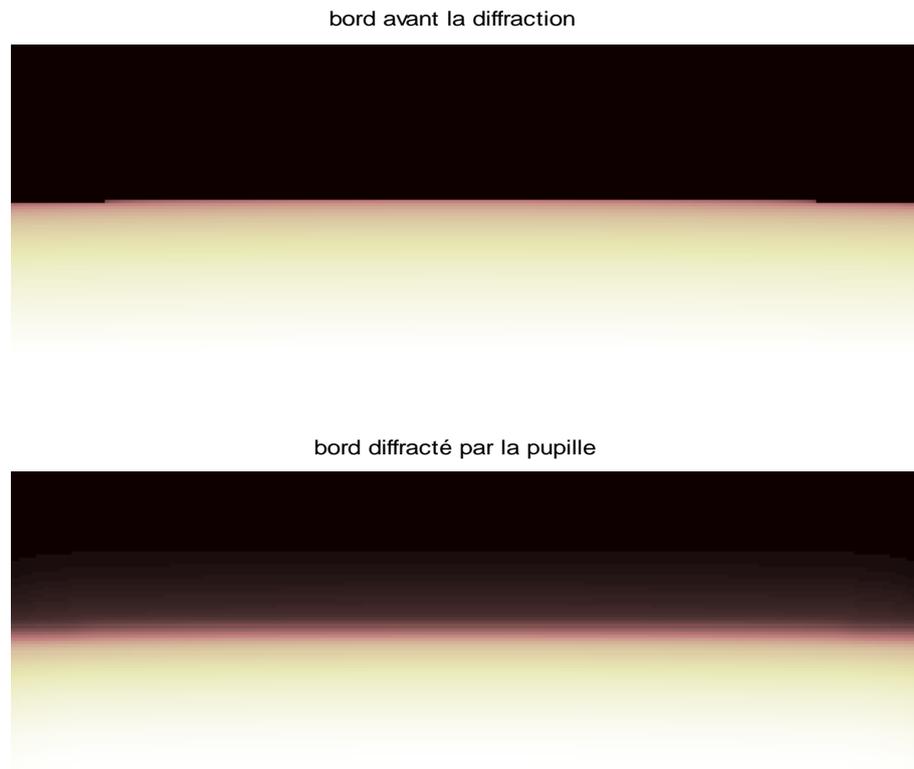


Figure (3.5) : cette figure montre l'effet de la pupille qui rend le bord solaire flou (*blurred limb*).

Dans la simulation on va garder les mêmes paramètres d'entrée caractérisant un instrument donné tout le long de cette étude, correspondant à des conditions expérimentales bien déterminées (diamètre de la pupille, longueur d'onde, échantillonnage...etc.). Dans ce qui suit on va se mettre dans le cas des images obtenues au moyen de DORaySol mais cela ne nous empêche pas d'étendre notre étude aux autres instruments. Il suffira juste de changer la valeur de ces paramètres.

3.2. Simulation de la turbulence atmosphérique :

Après la simulation du bord dans le cas parfait c'est-à-dire comme il devrait être vu hors atmosphère et qui sera défini comme étant le bord non perturbé dans ce qui suit.

On va, dans le paragraphe suivant, introduire le filtrage dû à la turbulence atmosphérique afin de quantifier ses effets sur les images du bord.

Cela ce fait en deux étapes importantes : la première étant la génération de l'écran de phase, la seconde est la convolution qui dépend du cas étudié (isoplanétique ou anisoplanétique).

3.2.1 Choix de la méthode spectrale :

Sachant que la turbulence atmosphérique dans le cas réel agit comme un écran de phase qui est à l'origine de la distorsion du front d'onde qui la traverse cela peut être expliqué de la façon suivante : si on met par exemple une lame demi onde sur le chemin d'un front d'onde celle-ci a pour effet d'introduire un déphasage constant de $\pi/2$, de la même manière la couche atmosphérique introduit un déphasage mais qui sera complètement aléatoire à cause de sa dynamique aléatoire (variation de l'indice de réfraction dans l'espace et dans le temps). Cependant son comportement statistique en moyenne obéit à des modèles établis (Kolmogorov).

On doit déterminer une fonction qui donnera le même filtrage introduit par la turbulence ; Cette fonction sera une distribution de nombres quasi aléatoires qui ont les mêmes propriétés statistiques que la grandeur physique correspondante, qui dans notre cas est la densité spectrale des fluctuations de la phase. On est donc amené à utiliser les méthodes spectrales de simulation.

Il s'agira de déterminer la variance du spectre des fluctuations de la phase et lui imposer les contraintes données par le modèle théorique de la turbulence atmosphérique, qui dans notre étude, sera le modèle de Von Kàrmàn. Plusieurs méthodes ont été élaborées dans ce but, La méthode du bruit blanc, la méthode fractale, et la méthode de Nakajima, c'est celle qu'on utilisera dans notre étude [37].

3.2.2 Méthode de Nakajima :

C'est une méthode qui a été largement utilisée dans le domaine de l'optique adaptative et plus généralement à l'imagerie astronomique [37] [6].

Définition d'une fonction aléatoire :

Soit \vec{r} une variable aléatoire, $R(\vec{r})$ la distribution spatiale des fluctuations de la phase. La transformée de Fourier de cette fonction donnera son spectre :

$$\hat{R}(\vec{f}) = TF [R(\vec{r})] \quad (3.2)$$

C'est une grandeur complexe aléatoire qui peut être écrite sous la forme :

$$\hat{R}(\vec{f}) = A(\vec{f}) \exp(i\Phi(\vec{f})) \quad (3.3)$$

Si l'on prend la moyenne statistique de son module au carré :

$$\langle |\hat{R}(\vec{f})|^2 \rangle = \langle |TF[R(\vec{r})]|^2 \rangle \quad (3.4)$$

Cela nous permet d'utiliser la contrainte imposée par le modèle, c'est dire que cette moyenne est égale à la densité spectrale de fluctuation de la phase :

$$\begin{aligned} \langle |\hat{R}(\vec{f})|^2 \rangle &= W_\varphi(\vec{f}) \\ \Rightarrow \langle |A(\vec{f})|^2 \rangle &= W_\varphi(\vec{f}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

On suppose que le module du spectre est une grandeur aléatoire de distribution statistique gaussienne, donc la variance est la densité spectrale $W_\varphi(\vec{f})$ et on écrit :

$$|\hat{R}(\vec{f})| = A(\vec{f}) = \sqrt{W_\varphi(\vec{f})} G(\vec{f})$$

Sachant que G est de variance égale à 1 on a :

$$\langle |\sqrt{W_\varphi(\vec{f})} G(\vec{f})|^2 \rangle = W_\varphi(\vec{f}) \quad (3.6)$$

Détermination de la phase en utilisant la transformé de Fourier inverse :

L'intérêt des méthodes spectrales de simulation est la possibilité de retrouver numériquement la distribution spatiale des fluctuations de la phase à partir de sa densité spectrale en passant par la transformée de Fourier inverse tel que :

$$R(\vec{r}) = TF^{-1} \left[A(\vec{f}) \sqrt{W_\varphi(\vec{f})} \exp(i\Phi(\vec{f})) \right] \quad (3.7)$$

Pour résoudre cette équation numériquement on utilisera la FFT bidimensionnelle (Fast Fourier Transform), [37] et cela en passant par les différentes étapes :

- créer une matrice carrée de taille $(2^n \times 2^n)$ pour la densité spectrale des fluctuations de la phase $W_\varphi(i, j)$ par un tirage aléatoire.
- On passe à l'échantillonnage dans l'espace de Fourier qui doit satisfaire le théorème de Shannon, sachant que le pas fréquentiel Δf de la matrice correspond au pas d'échantillonnage spatial de l'écran de phase dx . Selon Shannon ce pas est limité par une valeur maximale :

$$\Delta f_{\max} = \frac{1}{2dx}$$

- on crée deux autres matrices $A(i, j)$ et $\Phi(i, j)$ de même taille que $W(i, j)$ en faisant un tirage de nombres aléatoires réels ayant une distribution gaussienne de variance 1 pour $A(i, j)$ et une distribution statistique uniforme de nombre réels pour $\varphi(i, j)$ entre -2π et 2π .
- A partir de certaines considérations mathématiques (interpolation, symétrisation...etc.) qu'on ne développe pas ici, on passe au calcul de la phase en utilisant la FFT inverse d'où l'avantage du modèle qui est la rapidité de calcul grâce à la FFT.
- pour cela on utilise un programme écrit sous MATLAB.
- on obtient un écran de phase comme montré dans la figure (3.6) :

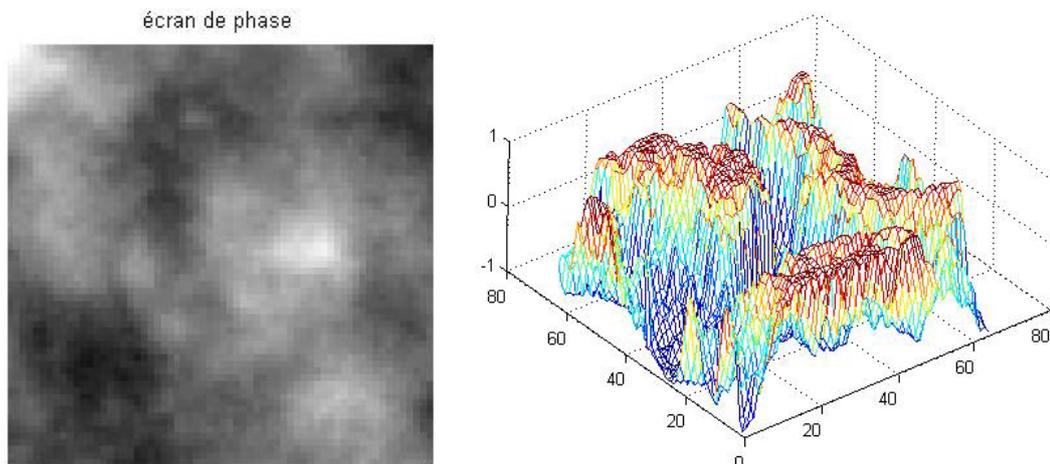


Figure (3.6) : la représentation de l'écran de phase à deux dimensions à gauche et à trois dimensions à droite.

Effet de l'échelle externe de cohérence spatiale L_0 :

Afin de retrouver les grandeurs injectées dans la simulation de l'écran de phase on peut pour commencer regarder l'effet des échelles limites de cohérence spatiale dans notre cas on n'a tenu compte que de l'échelle externe L_0 . Pour cela on va générer un écran de phase dont la taille doit être assez grande de l'ordre de L_0 pour voir son comportement.

On considère maintenant Δf le pas d'échantillonnage dans l'espace des fréquences et L_x la taille de l'écran de phase, pour tenir compte de la partie basses fréquences du spectre de la phase, Δf doit être pris très petit de sorte à avoir $L_x \gg L_0$. D'un autre côté, pour ne pas perdre les informations hautes fréquences, le pas d'échantillonnage sur l'écran de phase $dx = \lambda / L_x$ doit rester petit devant le paramètre de Fried r_0 qui nous donne la dégradation aux petites échelles de turbulence.

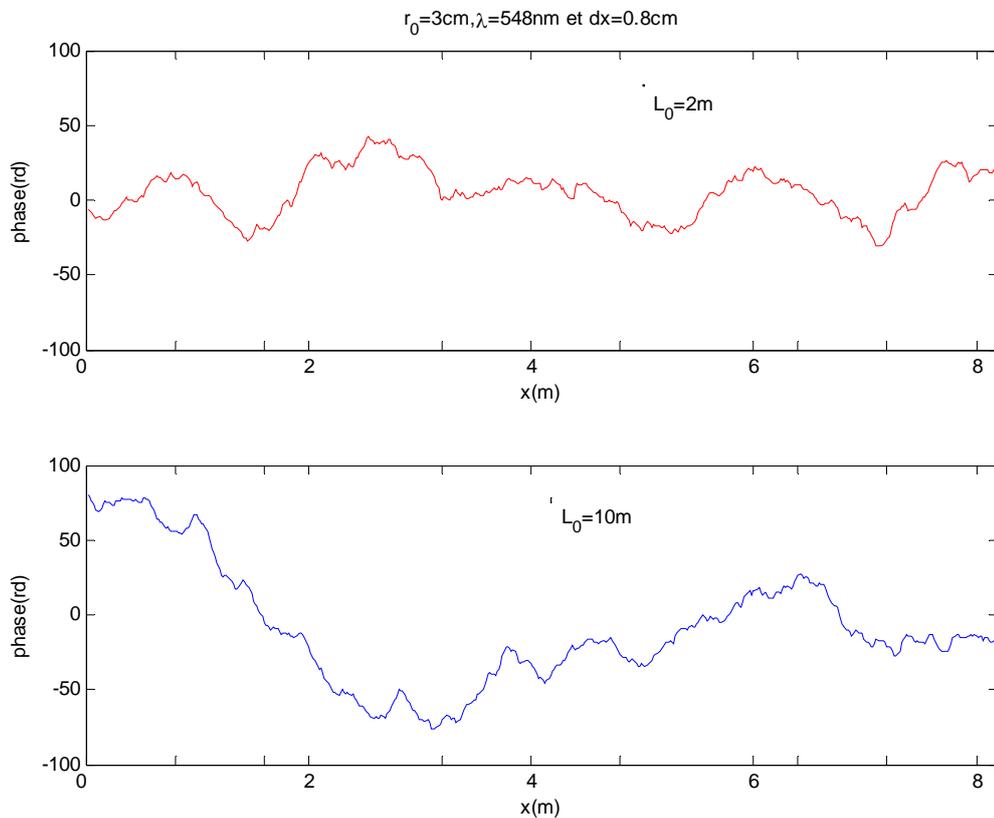


Figure (3.7) : Dans cette figure on représente la phase en prenant Un écran de taille égale à 8m avec un pas choisi pour une matrice de (1024x1024) Egal à $dx = 0.8cm$. Pour $L_0=2$ et 10m, les écrans de phase correspondants représentés respectivement en haut et en bas on peut voir que le basculement (tilt) varie en fonction de l'échelle externe.

Sur la figure (3.7) on peut voir que pour une longueur d'onde de 548nm la forme globale de l'écran de phase dépend de la valeur de l'échelle externe. Celle-ci définit la taille maximale pour laquelle l'écran de phase reste cohérent dans l'espace. Et cela doit être pris en compte dans notre simulation.

L'autre grandeur qui a une grande influence sur la forme de l'écran est comme le montre la figure (3.7) le paramètre de Fried qu'on a pris égale à $r_0 = 3\text{cm}$ ce qui correspond à une forte turbulence.

Pour l'écran de phase représenté sur la figure (3.8, haut) on a pris $r_0 = 8\text{cm}$ qui est assez grand par rapport à notre échantillonnage spatial dx ce qui nous a permis de mieux voir le comportement en haute fréquence. On remarque aussi une meilleure cohérence spatiale de l'écran de phase, figure 3.8, bas) :

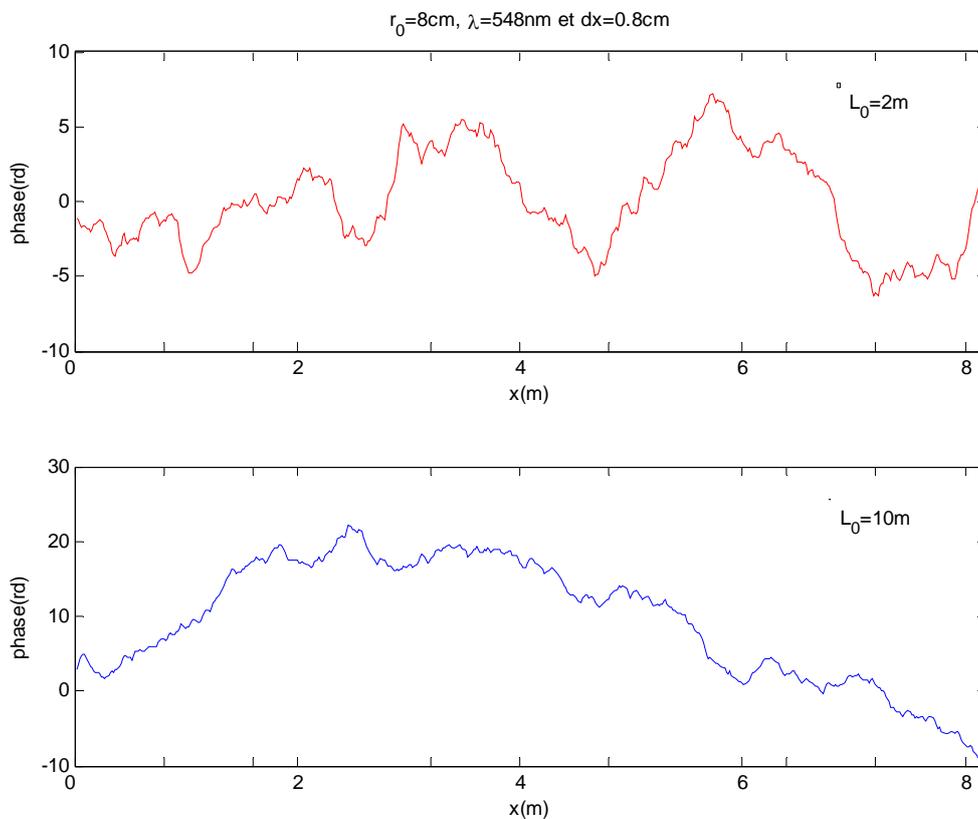


Figure (3.8): l' courbe en haut montre le comportement haute fréquence pour $L_0 = 2\text{m}$ qui est plus visible dans le cas $r_0 = 8\text{cm} \gg dx$ la courbe (en bas) montre que pour $L_0 = 8\text{m}$ on a un tilt peu variable.

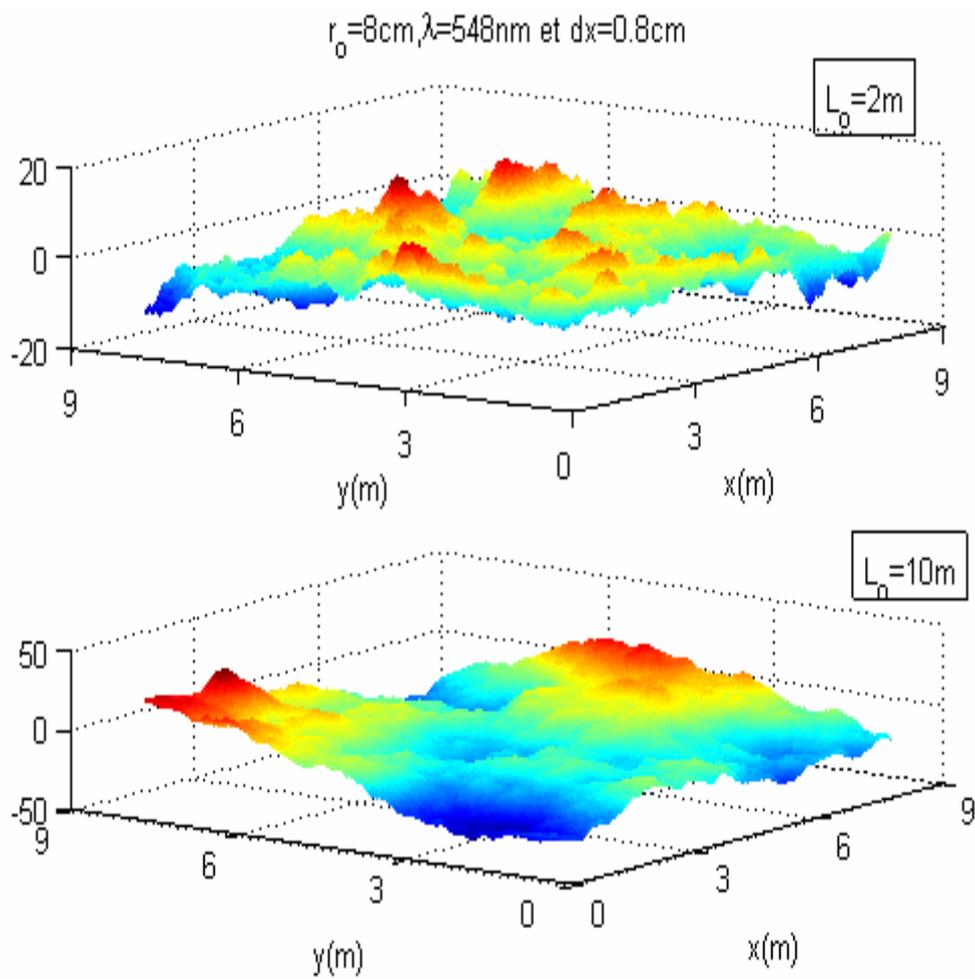


Figure (3.9) : Représentation à trois dimension de l'écran de phase dans les deux cas $L_0 = 2\text{m}$ et 10m . On voit que plus l'échelle externe est grande plus la forme de l'écran est lisse.

3.3. La construction de la réponse impulsionnelle (PSF) pupille- atmosphère :

C'est l'étape la plus importante de notre simulation où on doit préciser certains points cruciaux comme l'altitude de la couche atmosphérique considérée, le pas d'échantillonnage sur l'écran de phase sur la pupille ainsi que sur l'objet, cela va dépendre s'il y a isoplanétisme ou non.

Comme on l'a déjà expliqué théoriquement l'image du bord perturbé est le résultat d'un produit de convolution de l'image non perturbé avec la PSF pupille- atmosphère une fois déterminée suivant les étapes suivantes :

3.3.1 Echantillonnage :

Pour la pupille on prend $N_p = 64$ pixels, pour l'écran de phase on prend une matrice plus grande que celle de l'objet pour réduire l'effet de bord dans la convolution (dans notre cas on a pris 512 pixels pour une couche se trouvant à une hauteur h).

En ce qui concerne l'échantillonnage à cause de la limite imposée par la diffraction on a sur le bord:

$$d\theta_x = \lambda / L_x^p = \lambda / N_p dx$$

donc le pas sur la pupille est donné par :

$$dx = \lambda / N_p d\theta_x$$

La PSF pupille atmosphère sera donnée par le produit de l'amplitude complexe $\psi(x) = \exp(-i\varphi(x))$ (où $\varphi(x)$ est une composante de l'écran de phase dans une direction x donnée) et la fonction de pupille $P(x)$, celle-ci est la même quelles que soient les coordonnées du point objet. On prendra le même échantillonnage dx sur l'écran de phase et la pupille qui sera le pas sur la PSF (figure 3.10).

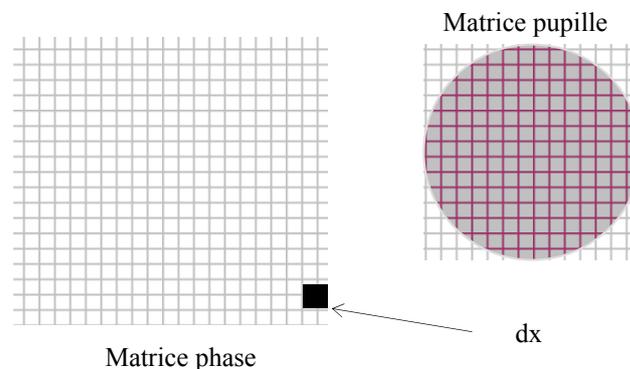


Figure (3.10) : un schéma pour montrer les différentes étapes suivies dans la construction de la PSF par simulation

3.3.2 Cas anisoplanétique :

Chaque onde lumineuse venant d'un point du plan objet situé dans une direction $d\theta_x$ donné, va produire une PSF=PSF($d\theta_x$) associée à cette dernière . Sachant que l'onde va traverser une partie bien déterminée de l'écran de phase qui diffère selon cette direction. Deux ondes issues de deux points du même objet étendu, ne vont pas forcément traverser la même turbulence. En terme de simulation cela revient à faire une projection de la pupille sur l'écran de phase dans la direction d'observation du point objet (figure 3.11). Pour reconstruire l'objet on procèdera à un décalage dr de la projection de la pupille sur l'écran de phase de sorte à suivre tous les points formant notre objet, figure (3.12). Pour une couche atmosphérique se trouvant à une altitude h , le décalage correspond à $dr = hd\theta_x$ il doit être choisi de sorte à voir le centre de la pupille passer de sa position initiale $x_0 = n_0 dx$ sur l'écran de phase à la position $x = x_0 - hd\theta_x$, qui doit correspondre à un nombre entier de pixels $x = ndx$. Cela nous donnera la condition sur le choix de la hauteur :

$$n_0 dx - hd\theta_x = ndx$$

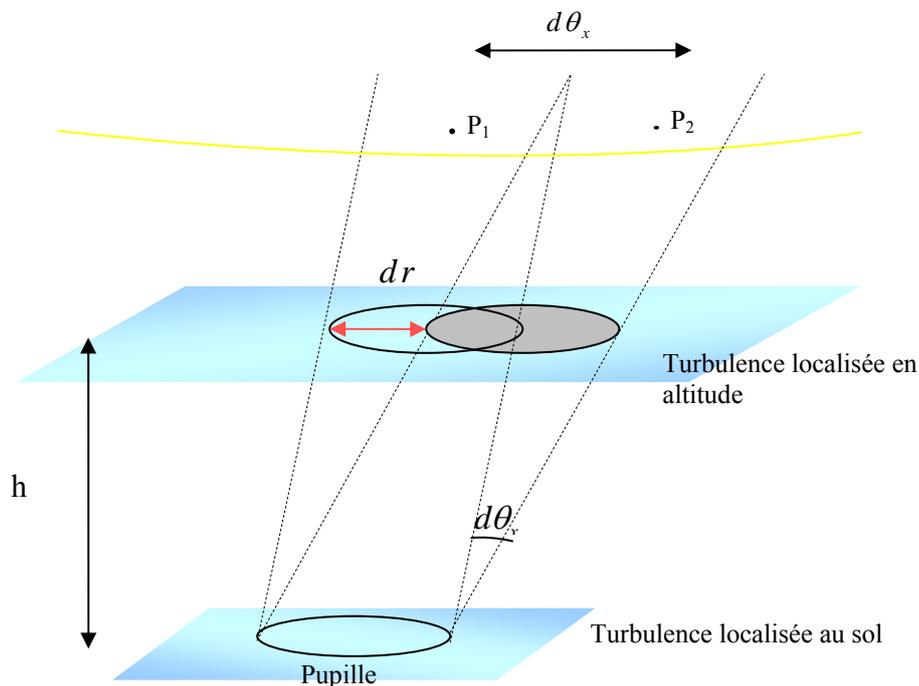
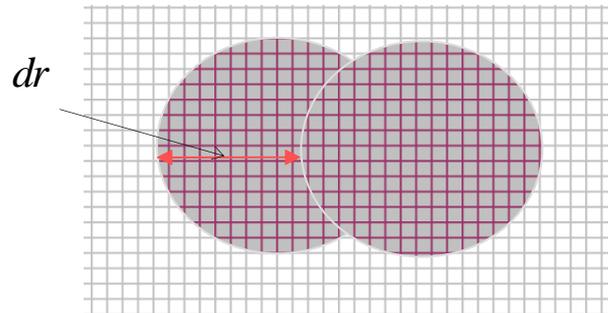


Figure (3.11) : schéma montrant la relation entre le pas d'échantillonnage, le décalage de la pupille sur l'écran de phase et la hauteur de la couche de turbulence.

Figure (3.12) :
le décalage de la pupille
sur l'écran de phase dans
le cas anisoplanétique.



3.3.3 Cas isoplanétique :

C'est le cas où l'on suppose que toutes les ondes lumineuses issues des points formants l'objet traversent la même turbulence ce qui correspond, dans le cas réel, à une turbulence localisée au sol ($h=0$). La PSF obtenue sera indépendante de la direction d'observation, ce qui revient dans la simulation à multiplier la matrice donnant le bord par la même PSF.

Dans ce qui suit on va supposer l'isoplanétisme pour simplifier notre étude. La PSF obtenue est représentée sur la figure (3.13), c'est une figure de speckle qui, comme on l'a déjà expliqué, correspond à la réponse impulsionnelle du système atmosphère – pupille.

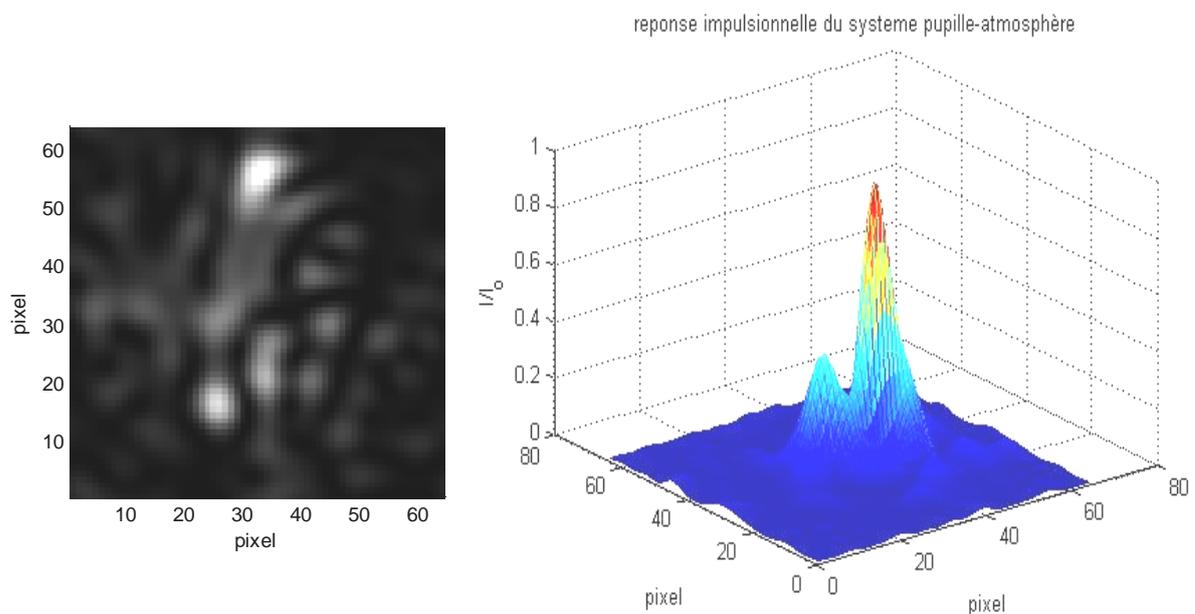


Figure (3.13) : figure de speckles qui représente la PSF pupille atmosphère en prenant : $r_0=1\text{cm}$, $\lambda = 548\text{nm}$ et $d\theta_x = 0.2''$.

3.4 Image du bord perturbé :

bord affecté par la turbulence atmosphérique ($r_0=2\text{cm}$, $L_0=5\text{m}$, $\lambda=548\text{nm}$ et $D=10\text{cm}$)



Figure (3.14) a : image du bord perturbé où l'on voit l'effet de la turbulence qui rend l'image très floue dans le cas isoplanétique.

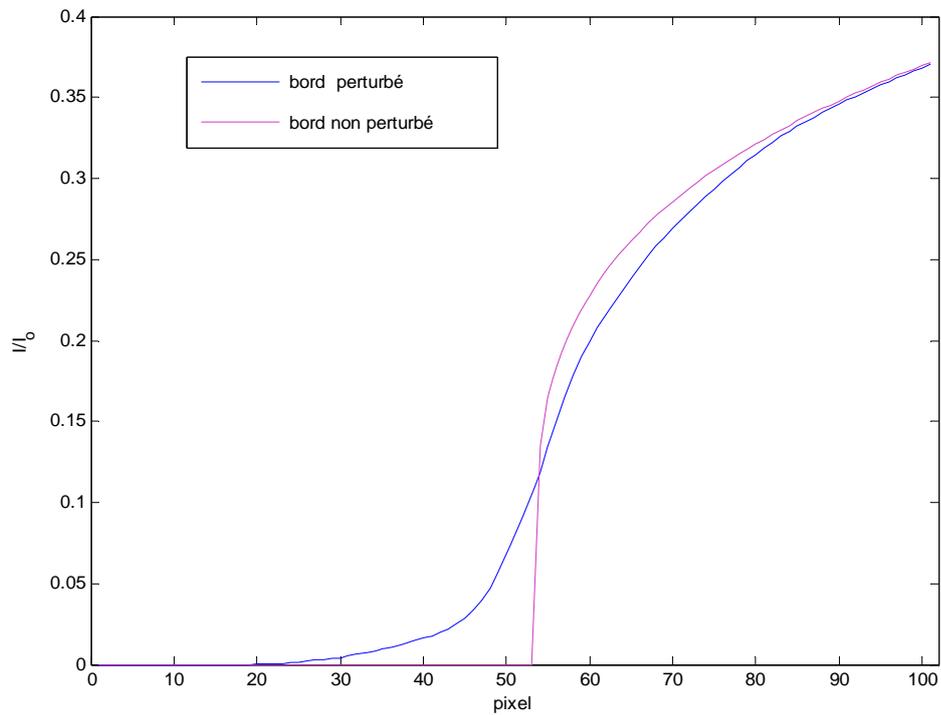


Figure (3.14) b : Dans cette figure on représente le profil en intensité du bord (une coupe de notre image)

On remarque que la convolution du bord non perturbé par la PSF pupille atmosphère, introduit un étalement de la zone autour du point d'inflexion. En d'autres termes, en présence de turbulence atmosphérique, il est difficile de parler d'un bord solaire comme il a été défini précédemment (par le point d'inflexion) figure (3.14), puisque sa position varie de manière aléatoire. D'un autre coté cette variation de la position étant directement liée à la turbulence elle nous renseigne sur les caractéristiques de celle-ci. La figure (3.15) montre qu'effectivement, la forme du bord dépend de la force de turbulence donnée par la valeur de r_0 .

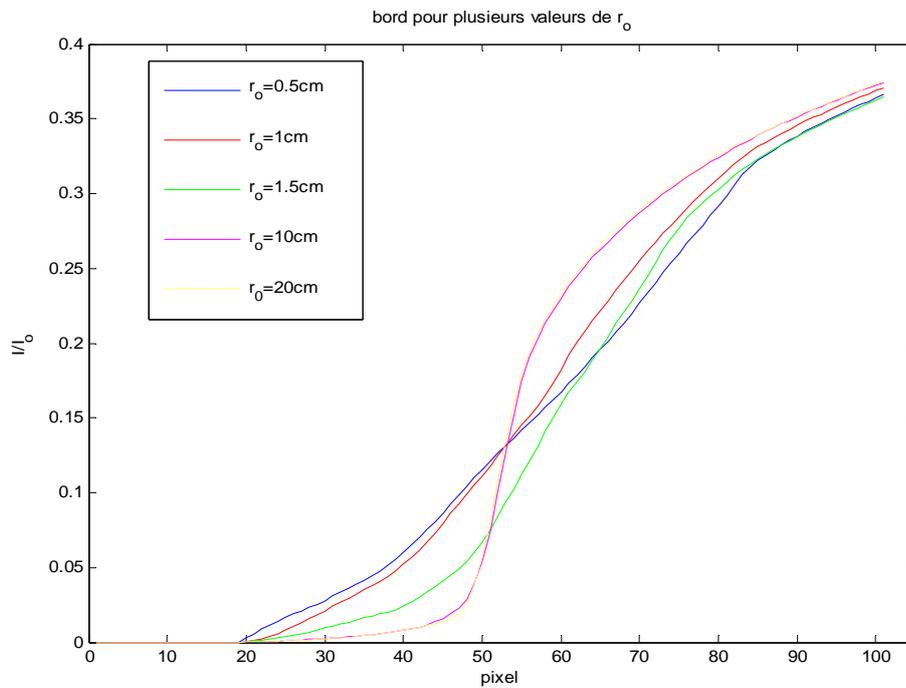


Figure (3.15) : pour L_0 fixe on fait varier la valeur de r_0 et on voit l'effet sur la forme du bord.

Pour des valeurs de r_0 allant de 0.5cm (forte turbulence) à 20cm qui, dans notre cas, est une valeur limite. Comme le montre la figure on est ramené au cas d'un bord non perturbé (absence de turbulence) ; ceci peut être pris comme une validation de la simulation.

Ces images du bord perturbé, sont construites en partant des valeurs de grandeurs caractérisant la turbulence qui sont supposées connues r_0, L_0 et C_n^2 et que l'on a injectées dans la simulation, cela a permis de voir l'effet de chaque paramètre sur la forme du bord de manière générale. L'intérêt de la simulation est de trouver le moyen de remonter à ces valeurs en ayant recours à d'autres outils ; c'est le cas des images réelles où l'on ignore complètement la valeur de ces grandeurs. L'un des moyens qu'on peut penser à utiliser est d'étudier la forme du bord perturbé, son étalement et sa variation en courte et longue pose, en utilisant les expressions établies dans les chapitres précédents.

Dans cette étude je vais m'intéresser au paramètre de Fried. L'effet de l'échelle externe n'est visible que pour des écrans de phase très grands, or dans notre cas la taille de la PSF est assez petite devant l'échelle de cohérence spatiale qu'on prendra fixe de valeur moyenne égale à 5m. J'ai utilisé différentes méthodes qui reposent toutes sur le même principe, calculer r_0 et le comparer avec la valeur injectée dans le modèle.

3.5. Dédution du paramètre de Fried :

3.5.1 La variance théorique des fluctuations de l'angle d'arrivée :

Avant de développer les différentes méthodes qui donnent la valeur du paramètre de Fried, on détermine d'abord la valeur théorique de la variance des fluctuations de l'angle d'arrivée ; celle-ci étant la grandeur qu'on va mesurer. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent la relation liant la variance au paramètre de Fried est donnée par l'équation (2.32) et tenant compte de l'équation (1.50) on écrit :

$$\sigma_{\alpha}^2 = \pi 0.3827 \cos^{-1} \gamma \int dh C_n^2(h) \int_0^{+\infty} df \cdot f^3 \left(f^2 + \frac{1}{L_0} \right)^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{(\pi fD)} \right|^2 \cos(\pi \lambda h f^2)^2 \quad (3.8)$$

Dans notre étude, on suppose que l'observation se fait dans la direction zénithale $\gamma = 0$ et la turbulence est prise au sol ($h = 0$). En introduisant le paramètre de Fried on trouve:

$$\sigma_{\alpha}^2 = 0.0716 \lambda^2 r_0^{-5/3} \int_0^{+\infty} df \cdot f^3 \left(f^2 + \frac{1}{L_0} \right)^{-11/6} \left| \frac{2J_1(\pi fD)}{(\pi fD)} \right|^2 \quad (3.9)$$

comme cette intégrale n'a pas de solution analytique, on la résout numériquement. On aura pour chaque valeur de r_0, L_0 et D la variance correspondante donnée par le modèle théorique utilisé, c'est-à-dire, le modèle de Von Kàrmàn.

Résolution numérique de l'intégrale :

On reprend l'équation (3.9) et on écrit :

$$\sigma_{\alpha}^2 = 0.0716 \lambda^2 r_0^{-5/3} I(D, L_0) \quad (3.10)$$

avec

$$I(L_0, D) = \int_0^{+\infty} G(f, D, L_0) df$$

La solution numérique de cette intégrale dépend de l'échelle externe et du diamètre de la pupille. On représente dans le tableau suivant les valeurs de cette intégrale en fonction de L_0 et D :

$L_0(m)$	$D(m)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1		1.6197	0.7528	0.4178	0.2532	0.1626	0.1092	0.0760	0.0546	0.0402	0.0304
2		2.2695	1.2856	0.8472	0.5975	0.4389	0.3316	0.2559	0.2009	0.1600	0.1291
3		2.6097	1.5942	1.1230	0.8422	0.6550	0.5220	0.4234	0.3483	0.2897	0.2432
4		2.8299	1.8013	1.3158	1.0204	0.8189	0.6724	0.5612	0.4742	0.4048	0.3484
5		2.9885	1.9533	1.4601	1.1567	0.9472	0.7928	0.6739	0.5797	0.5033	0.4403
6		3.1104	2.0713	1.5736	1.2653	1.0508	0.8914	0.7675	0.6685	0.5874	0.5199
7		3.2082	2.1667	1.6661	1.3546	1.1368	0.9739	0.8467	0.7443	0.6599	0.5892
8		3.2893	2.2461	1.7434	1.4297	1.2096	1.0443	0.9147	0.8098	0.7231	0.6500
9		3.3579	2.3136	1.8095	1.4942	1.2723	1.1053	0.9739	0.8672	0.7787	0.7038
10		3.4172	2.3720	1.8668	1.5503	1.3272	1.1589	1.0261	0.9180	0.8281	0.7518
11		3.4690	2.4232	1.9172	1.5998	1.3758	1.2064	1.0725	0.9634	0.8723	0.7949
12		3.5150	2.4687	1.9621	1.6440	1.4191	1.2489	1.1142	1.0042	0.9123	0.8340
13		3.5562	2.5095	2.0024	1.6837	1.4582	1.2874	1.1520	1.0413	0.9486	0.8696
14		3.5934	2.5463	2.0388	1.7197	1.4937	1.3223	1.1863	1.0750	0.9818	0.9022
15		3.6272	2.5799	2.0720	1.7525	1.5261	1.3542	1.2178	1.1061	1.0123	0.9322
16		3.6581	2.6106	2.1025	1.7826	1.5558	1.3836	1.2468	1.1346	1.0405	0.9599
17		3.6866	2.6388	2.1305	1.8104	1.5833	1.4108	1.2737	1.1611	1.0666	0.9857
18		3.7129	2.6650	2.1565	1.8361	1.6088	1.4360	1.2986	1.1857	1.0909	1.0097
19		3.7373	2.6893	2.1806	1.8600	1.6325	1.4595	1.3218	1.2087	1.1136	1.0321
20		3.7601	2.7119	2.2031	1.8824	1.6547	1.4814	1.3435	1.2302	1.1349	1.0532

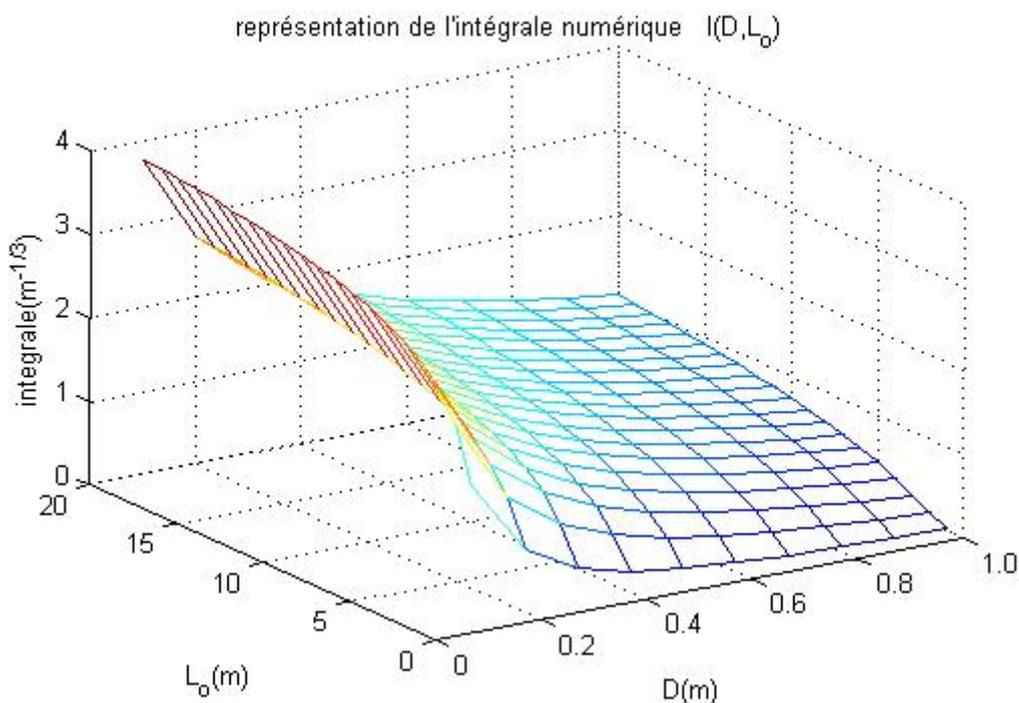


Figure (3.16): Représentation des valeurs de l'intégrale $I(D, L_0)$ obtenues numériquement.

En fixant la valeur de $L_0 = 5m$, on calcule cette intégrale pour différentes valeurs du diamètre D . On détermine une fonction d'approximation du type exponentiel qui nous donne comme le montre la figure (3.17) une bonne approximation aux valeurs numériques de cette intégrale ; cette fonction est donnée par:

$$G(D) = a \exp(bD) + c \exp(dD)$$

avec :

$$a = 3.128, b = -9.012, c = 1.92 \text{ et } d = -1.626$$

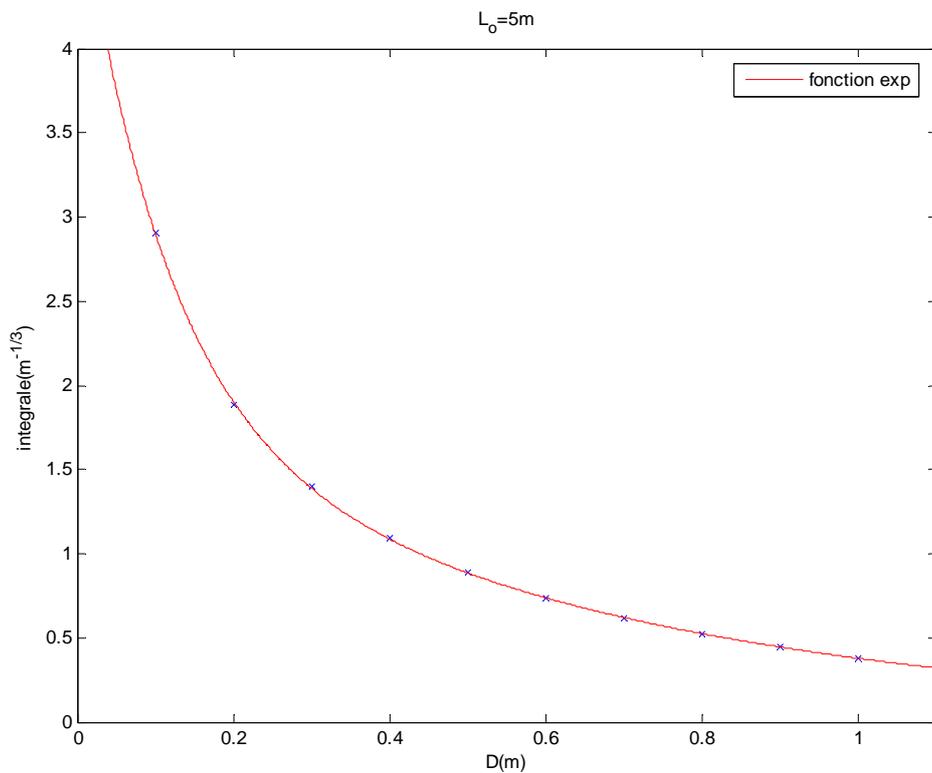


Figure (3.17) : la figure montre la bonne approximation des valeurs numériques par la fonction exponentielle

De cette courbe on peut obtenir par interpolation, la valeur numérique de l'intégrale et donc de la variance théorique pour n'importe quelle valeur de D . On peut aussi calculer cette intégrale pour d'autres valeurs de L_0 et établir la formule empirique correspondante, ainsi pour chaque valeur de L_0 on a les coefficients a , b , c et d qui définissent la fonction d'approximation et la variance théorique correspondante. Dans notre étude on ne s'intéresse qu'à une seule valeur de L_0 (5m) et du diamètre D (0.1m) on prendra la valeur de l'intégrale correspondante qui est $I = 2.9058 \text{ m}^{-1/3}$.

Et pour faire la comparaison, on donne aussi la valeur de la variance en utilisant l'expression de la densité spectrale donnée dans le modèle de Kolmogorov où l'on prend l'échelle externe infinie, équation (2.33) et (2.36), La variance théorique es donnée en fonction de r_0 dans le tableau suivant :

r_0 (m)	$\sigma^2_{\text{kolmogorov}}$ (pixel ²)	$\sigma^2_{\text{Von Karman}}$ (pixel ²)
0.0050	198.8664	116.8712
0.0100	62.6390	36.8121
0.0150	31.8683	18.7286
0.0200	19.7300	11.5951
0.0250	13.6023	7.9939
0.0300	10.0379	5.8991
0.0350	7.7636	4.5626
0.0400	6.2146	3.6522
0.0450	5.1069	3.0013
0.0500	4.2844	2.5179
0.0550	3.6552	2.1481
0.0600	3.1617	1.8581
0.0650	2.7669	1.6261
0.0700	2.4454	1.4371
0.0750	2.1798	1.2810
0.0800	1.9575	1.1504
0.0850	1.7693	1.0398
0.0900	1.6086	0.9453
0.0950	1.4700	0.8639
0.1000	1.3495	0.7931
0.1050	1.2441	0.7312
0.1100	1.1513	0.6766
0.1150	1.0691	0.6283
0.1200	0.9959	0.5853
0.1250	0.9304	0.5468
0.1300	0.8715	0.5122
0.1350	0.8184	0.4810
0.1400	0.7702	0.4527
0.1450	0.7265	0.4270
0.1500	0.6866	0.4035

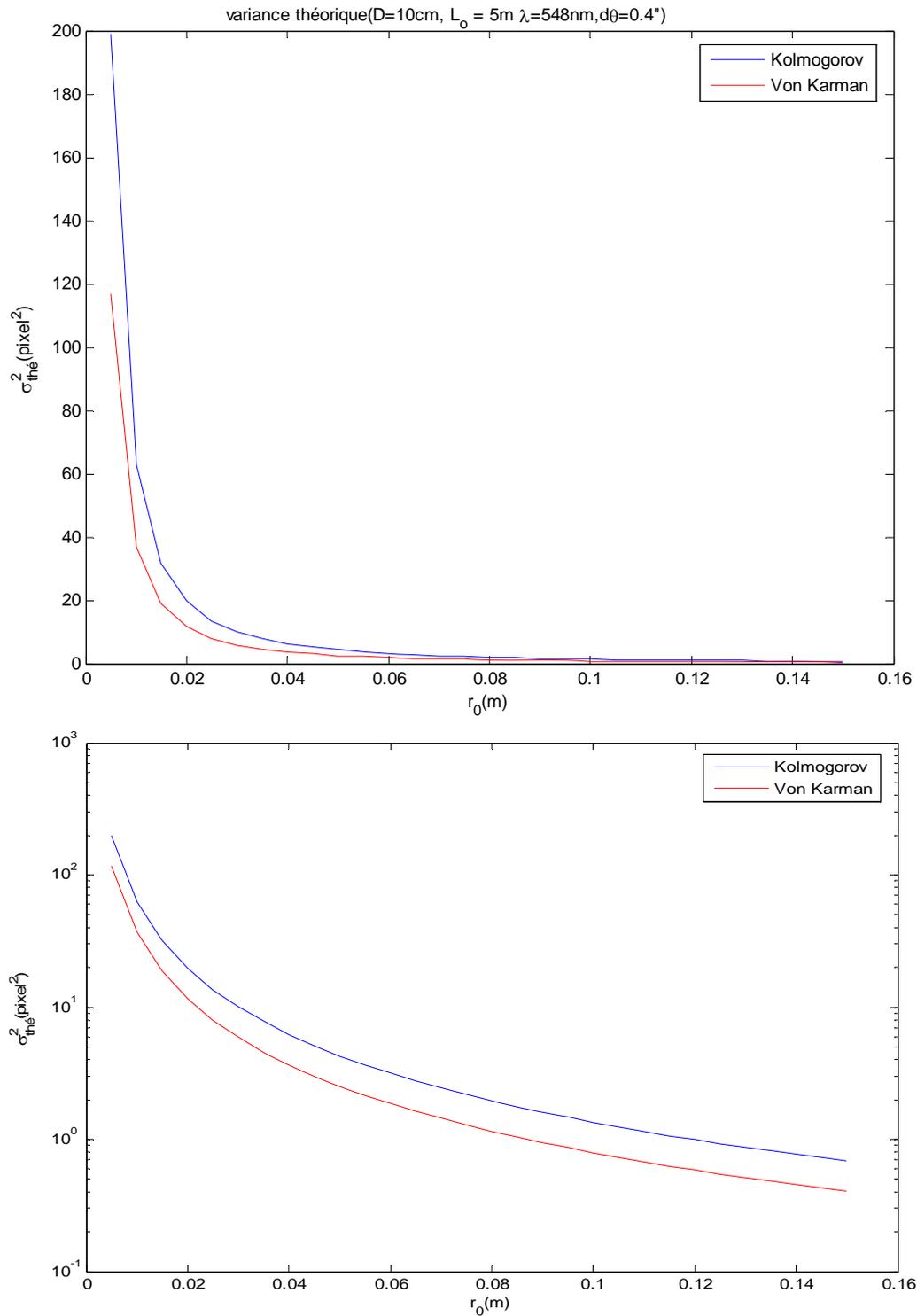


Figure (3.18) : Variance des fluctuations de l'angles d'arrivée calculée dans les deux cas d'un spectre de Kolmogorov et celui de Von Kàrmàn, pour différentes valeurs de r_0 (en haut en échelle linéaire et en bas logarithmique).

Sur la (figure 3.18) on constate que la valeur de la variance des fluctuations de l'angle d'arrivée, n'est pas la même en comparant les deux expressions de la densité de phase (Kolmogorov et Von Kàrmàn). Pour tenir compte de l'effet de l'échelle externe dans le calcul de la variance, on utilise celle qui est donnée par Von Kàrmàn dans tout ce qui suit. La variance théorique est prise dans ce cas là en nombre de pixels donc on doit préciser le pas d'échantillonnage pris sur les images ; ces résultats sont obtenus pour $d\theta = 0.4''$.

Dans le paragraphe (2.2), on a parlé des principaux effets de la turbulence atmosphérique, en plus de la diffraction à travers la pupille de l'instrument d'observation. En effet, on peut distinguer deux phénomènes au niveau du bord solaire. Si on considère les réponses impulsionnelles affectant le bord, celles-ci sont des figures de speckles qui sont aussi affectées par une agitation aléatoire. La position du bord étant déterminée par le point d'inflexion, elle est affectée par cette agitation qui se présente sous forme de mouvement aléatoire dans les deux directions, perpendiculaire et parallèle au bord. C'est ce qu'on a défini par l'équation(2.36) donnant la variance des fluctuations de l'angle d'arrivée. L'autre effet est dû à la forme instantanée de chaque PSF, d'où l'étalement du bord. Pour une turbulence donnée, on peut séparer ces deux effets en précisant que le premier est systématique (chaque point du bord va être éclaté en une figure de speckle qu'on appellera l'étalement instantané) puis on a cette forme de speckle qui change aléatoirement d'un instant à l'autre, (calculer la position du photocentre de chaque distribution en intensité donnant ces speckles, montre une fluctuation de ce dernier), c'est un phénomène aléatoire. Au bout de quelques instants, ces fluctuations instantanées vont s'empiler sur une seule image pour donner une forme moyenne. C'est ces deux effets qu'on va utiliser pour déterminer le paramètre de Fried.

3.5.2 Extraction du paramètre de Fried sur les images du bord solaire :

Toujours dans le paragraphe (2.2) on a établi la relation qui permet de remonter aux paramètres caractérisants la turbulence atmosphérique qui en est responsable. Dans cette partie on va déterminer le paramètre de Fried, en étudiant ces deux phénomènes que sont l'étalement et l'agitation du bord solaire.

On commence d'abord par étudier l'agitation sur le bord et en extraire la valeur de r_0 . On utilise donc la relation liant le paramètre de Fried à la variance des fluctuations d'AA donnée par l'équation (2.36).

3.5.3 Etude du phénomène d'agitation :

Dans la simulation, calculer l'agitation de la PSF donne les fluctuations de l'AA. En déterminant le photocentre de la PSF, et calculer sa variance sur une série d'images de PSF courtes poses (200 images instantanées), puis vérifier si on retrouve la même agitation sur des images du bord affecté par ces mêmes PSF.

Fluctuations de l'Angle d'arrivée (AA) données par l'agitation de la PSF:

Pour calculer l'agitation sur les PSF on génère une série d'images de speckles dont on calcule la position du photocentre sur chacune d'elles. On passe ensuite à une étude unidimensionnelle de l'agitation sur les PSF puisque sur le limbe on ne prend en compte que l'agitation dans la direction perpendiculaire au bord. On prend une colonne de chaque speckle (une coupe transversale), celle-ci elle est approximée à une gaussienne (figure 3.19).

Afin de calculer le photocentre de la PSF on peut procéder par plusieurs manières, le calcul du photocentre en utilisant la formule mathématique qui définit les coordonnées du photocentre d'une fonction donnée $y=f(x)$ par :

$$X_{pc} = \int x f(x) df / \int f(x)df .$$

$$Y_{pc} = \int y f(x)df / \int f(x)df .$$

Dans notre cas on utilise l'ajustement gaussien et le photo-centre de chaque PSF est donné directement par les coefficients de la fonction de gauss.

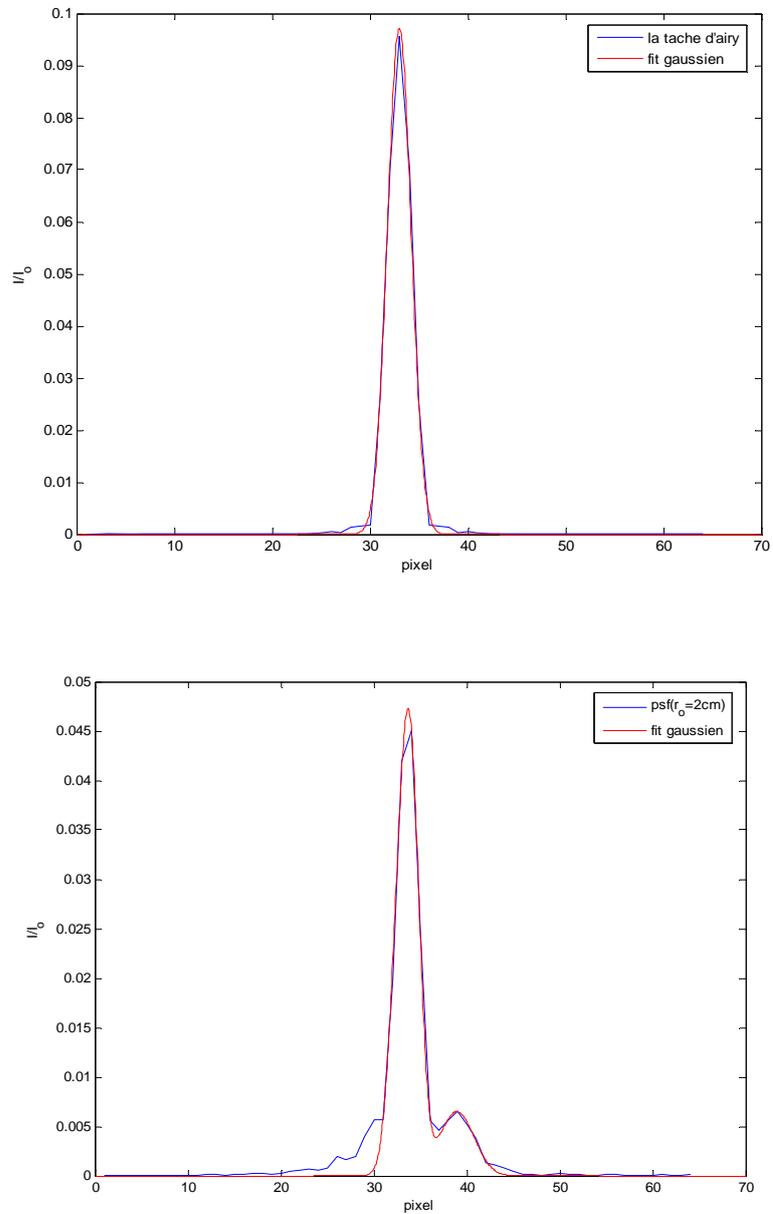


Figure (3.19) : image d'une coupe de la tache d'Airy (en haut) et celle de la PSF (en bas) et l'ajustement avec une somme de 3 gaussiennes . Dans cet exemple où on a pris $r_0=2\text{cm}$, on localise le photocentre de la PSF : $P=33\text{pixels}$ et celui de la tache d'Airy à $P_0=34.14$ ceci montre l'effet de la turbulence atmosphérique sur la position du photocentre de notre PSF.

On refait cette opération sur toutes les images pour différentes valeurs de r_0 et on note les résultats dans le tableau suivant :

$\sigma_{thé}^2 (pixel^2)$	$r_0^{thé} (m)$	$\sigma_{cal}^2 (pixel^2)$	$r_0^{cal} (m)$
116.8758	0.0050	148.8999	0.0044
36.8135	0.0100	35.8590	0.0104
18.7293	0.0150	20.0224	0.0146
11.5955	0.0200	9.7973	0.0225
7.9942	0.0250	7.8867	0.0256
5.8994	0.0300	4.9832	0.0338
4.5627	0.0350	3.5129	0.0417
3.6524	0.0400	2.5781	0.0501
3.0014	0.0450	2.4517	0.0516
2.5180	0.0500	2.1241	0.0563
2.1481	0.0550	1.6254	0.0662
1.8582	0.0600	1.3232	0.0748
1.6262	0.0650	1.2945	0.0758
1.4372	0.0700	0.8529	0.0974
1.2811	0.0750	0.9853	0.0894
1.1504	0.0800	0.7726	0.1034
1.0398	0.0850	0.8227	0.0995
0.9454	0.0900	0.5586	0.1256
0.8639	0.0950	0.6060	0.1196
0.7931	0.1000	0.4491	0.1432
0.7312	0.1050	0.4483	0.1433
0.6767	0.1100	0.4606	0.1409
0.6283	0.1150	0.4214	0.1486
0.5853	0.1200	0.3820	0.1577
0.5468	0.1250	0.3394	0.1693
0.5122	0.1300	0.2830	0.1888
0.4809	0.1350	0.2753	0.1920
0.4526	0.1400	0.3133	0.1776
0.4269	0.1450	0.2623	0.1976
0.4035	0.1500	0.2445	0.2061

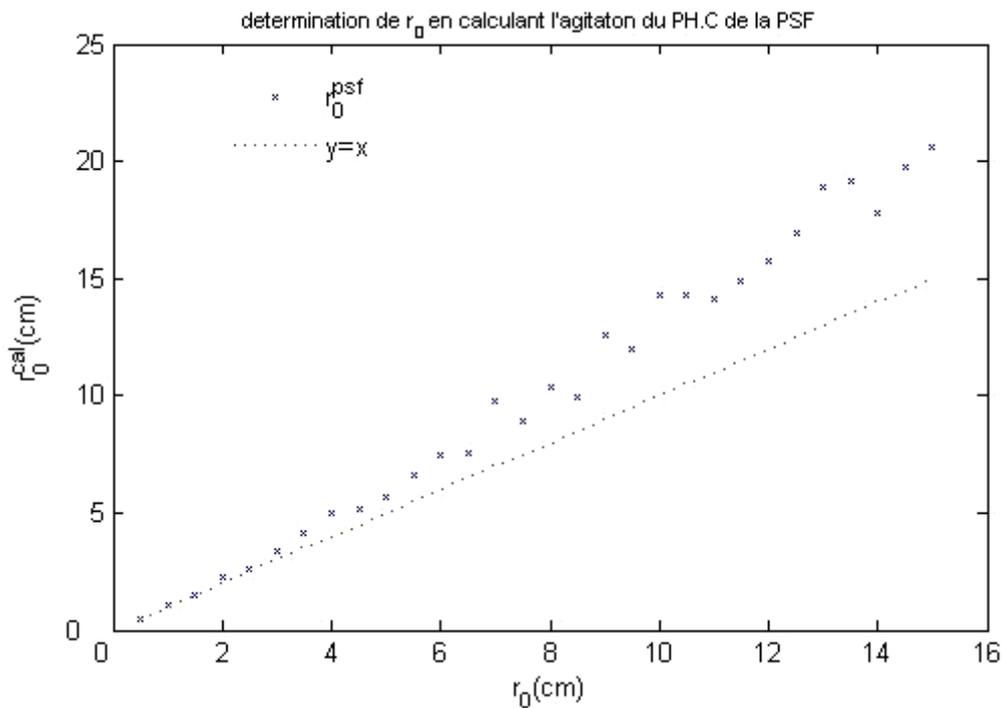
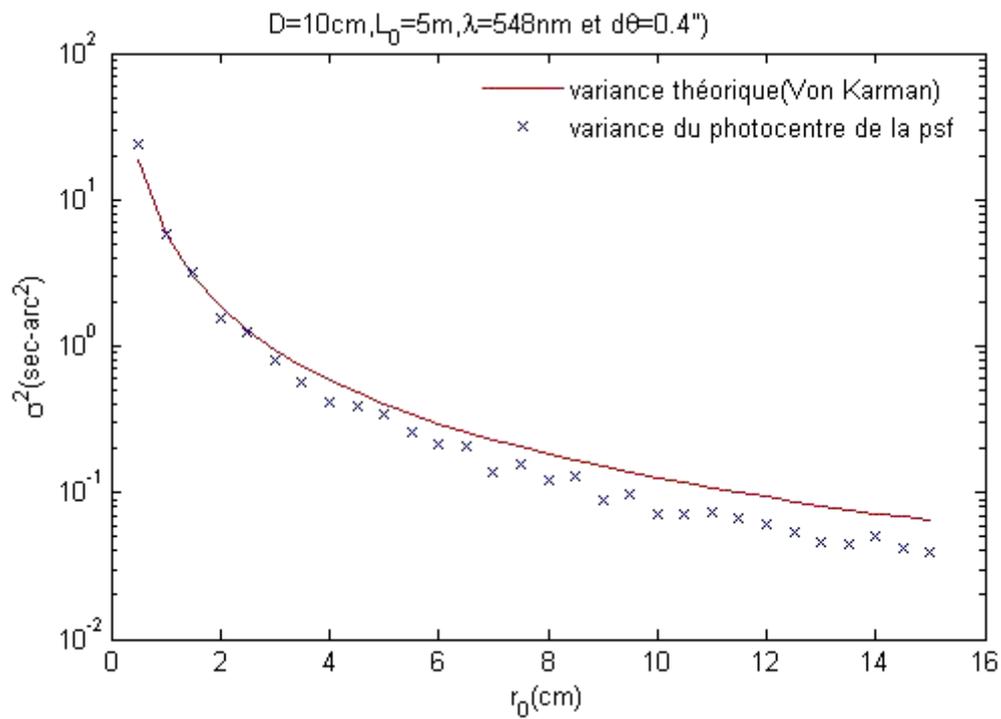


Figure (3.20) : représentation de la variance des fluctuations du photocentre de la PSF (en haut) et la valeur de r_0 calculé par cette méthode (en bas).

- On remarque sur cette figure que les variances obtenues par cette méthode sont plus proches des valeurs théoriques en particulier pour r_0 petit.
- On remarque aussi un écart entre les valeurs théoriques et celles du photo-centre mais qui n'est, à priori, pas proportionnel à la valeur de r_0 , on en discutera plus loin.

Interprétation : Ces résultats sont importants car en réalité le mouvement du photocentre de la PSF est à l'origine de l'agitation dans le plan image. Dans un cas idéal les deux courbes donnant la variance théorique et celle des fluctuations du photocentre doivent être confondues quelque soit la valeur de r_0 , or la forme de la PSF joue un rôle important dans la position de son photocentre. Comme on l'a déjà expliqué, la PSF constitue une distribution en intensité ayant la forme d'une tâche de taille moyenne proportionnelle à λ/r_0 et se composant de structures fines de taille proportionnelle à λ/D (figure 3.21), dont le nombre sera donné par le rapport D/r_0 . Cependant si r_0 est petit, cas d'une grande turbulence, la PSF est plus étalée que dans le cas des faibles turbulences (r_0 grand), où la forme de la PSF se rapproche de la tâche d'Airy. Sachant que cette dernière constitue la limite de résolution, donc on ne peut suivre le mouvement du photocentre à l'intérieur de cette tâche, (perte d'information en haute fréquence), d'où la sous-estimation de la variance pour les faibles turbulences. En plus de ça, on a les erreurs statistiques (la génération de composantes aléatoires donnant l'écran de phase, l'échantillonnage de l'écran de phase...etc.), ce qui explique le décalage entre ces deux courbes. Dans notre cas l'approche est assez satisfaisante on peut prendre ce résultat comme étant une validation de cette méthode. Dans la suite des calculs, on prendra l'agitation de la PSF comme origine des fluctuations d'AA sur les images du bord solaire.

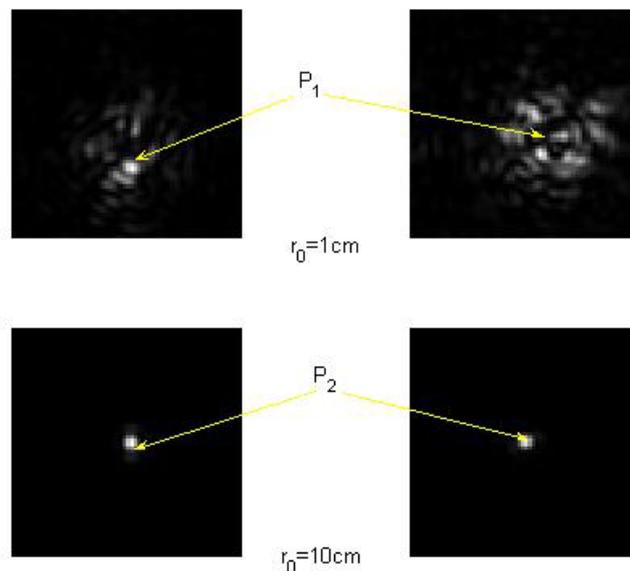


Figure (3.21) : cette figure montre l'importance de la forme du speckle dans la localisation du photocentre. Cependant pour une grande turbulence le point P_1 va se déplacer d'une distance supérieure à la structure fine ($1/D$) c'est ce mouvement qui sera comptabilisé dans le calcul de la variance alors que le point P_2 va se mouvoir sur une distance inférieure à cette structure fine qui va être masqué

Conclusion :

Les résultats présentés ci dessus portant sur l'étude statistique des fluctuations d'angle d'arrivée qui correspond, selon la théorie (paragraphe 2.2), à la variation aléatoire de la phase donnée par la PSF (figure de speckle), montrent qu'effectivement l'agitation, moyennée sur la pupille, d'un point objet est donnée par l'agitation du photocentre de la PSF (grandeur calculée), et permet de retrouver l'évolution angulaire instantanée de la phase (grandeur injectée).

Aussi j'ai montré le rôle que joue la taille de la pupille d'entrée dans le calcul des variances en concluant que pour les grandes turbulences (r_0 petit), on a une bonne approche des valeurs injectées et mesurées, alors que pour les faibles turbulences on note une sous estimation de ces variances c'est-à-dire l'agitation dans ces conditions sera masquée par la diffraction sur la pupille.

Ces résultats sont importants car ils nous permettent de dire, en se plaçant dans des cas réalistes, où les mesures expérimentales sont souvent affectées par de grandes turbulences atmosphériques et en vue de chiffrer cette turbulence. Il est plus intéressant de prendre de petits diamètres. Par exemple, si on prend une pupille de diamètre D dans des conditions de turbulence donnée par r_0 on a n le nombre de structures fines de la PSF est donné par $D / r_0 = n = \frac{D/2}{r_0/2}$ donc pour une turbulence deux fois plus importante il suffit de prendre un diamètre deux fois plus petit pour la calculer.

Une fois établit et calculée la grandeur caractérisant la turbulence atmosphérique, on essaie de la retrouver sur les images du bord solaire affecté par cette turbulence.

3.5.4 Agitation du bord solaire :

On utilise deux méthodes, la première consiste en l'étude statistique du point d'inflexion, dans la deuxième on suit le photo-centre de la dérivée du bord, ce choix est expliqué dans le paragraphe suivant.

Etude statistique du point d'inflexion :

Afin de calculer l'agitation du bord perturbé, avec cette méthode, on prend une seule ligne du bord (une coupe) on obtient une courbe en intensité dont le point d'inflexion représente le bord.

En premier lieu, on génère des bords non perturbés à une dimension puis on convolue par la PSF à une dimension, puisque on ne calcul que l'agitation unidimensionnelle.

Cette opération est répétée pour différentes valeurs de r_0 (200 bords instantanés pour chaque valeur de r_0).

- on prend la dérivée première du bord perturbé.

- on localise l'abscisse du maximum de cette dérivée première noté P_{max} .

- on prend la dérivée seconde de ce bord où l'on choisisse un intervalle autour de P_{max} entre les deux extremums.

- on ajuste sur cet intervalle, dans notre cas, c'est l'ajustement cubique (polynôme de troisième degré) qui semble le plus adéquat.
- la position du point d'inflexion correspond au passage par zéro de la courbe d'ajustement
- si on ajuste tous ces points par une parabole, sur toutes les lignes du bord on peut reconstituer le contour déterminant le bord solaire mais ceci n'est pas le but de notre étude.

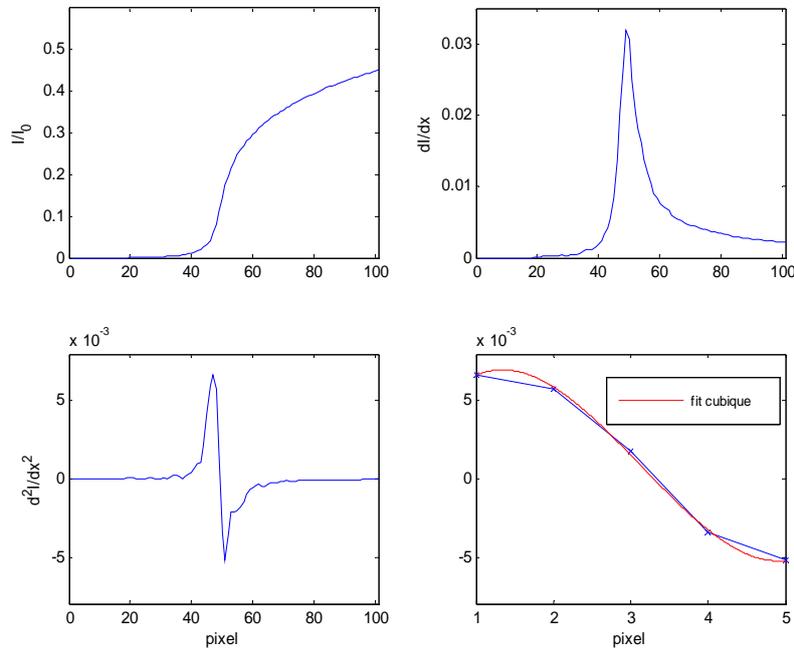


Figure (3.22) : $r_0=4cm$ le point d'inflexion est localisé à $P_x = 50.3034$ pixels

Ainsi pour une turbulence donnée, on a la variation de la position du point d'inflexion d'une image à l'autre.

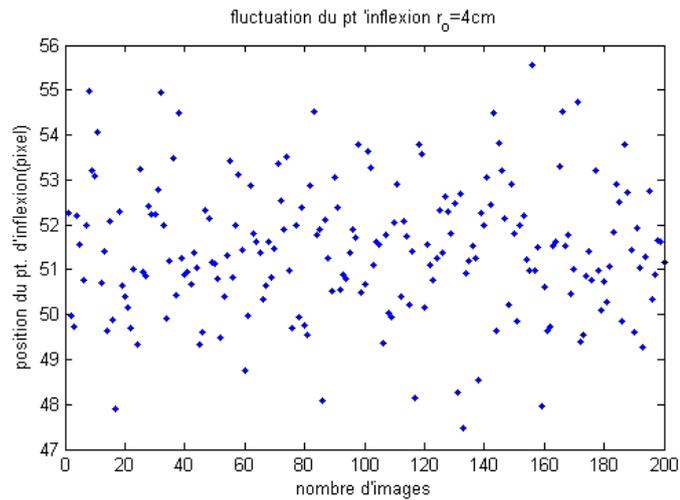


Figure (3.23) : fluctuation de la position du point d'inflexion

L'évolution du point d'inflexion sur les deux cents images présente des fluctuations spatiales, de variance σ_s c'est la grandeur qu'on calcule est utilisée dans la détermination de r_0 :

$r_0^{psf} (m)$	$\sigma_{psf}^2 (pixel^2)$	$\sigma_{cal}^2 (pixel^2)$	$r_0^{cal} (m)$
0.0104	35.8590	34.1056	0.0105
0.0146	20.0224	21.2494	0.0139
0.0225	9.7973	10.5344	0.0212
0.0256	7.8867	8.8174	0.0236
0.0338	4.9832	5.1720	0.0325
0.0417	3.5129	3.6523	0.0400
0.0501	2.5781	2.8800	0.0461
0.0516	2.4517	2.7327	0.0476
0.0563	2.1241	2.2950	0.0529
0.0662	1.6254	1.6432	0.0646
0.0748	1.3232	1.2795	0.0751
0.0758	1.2945	1.3827	0.0717
0.0974	0.8529	1.0397	0.0850
0.0894	0.9853	1.0187	0.0861
0.1034	0.7726	0.8399	0.0967
0.0995	0.8227	0.7900	0.1003
0.1256	0.5586	0.5437	0.1255
0.1196	0.6060	0.6078	0.1174
0.1432	0.4491	0.4500	0.1405
0.1433	0.4483	0.4297	0.1445
0.1409	0.4606	0.4937	0.1330
0.1486	0.4214	0.4866	0.1341
0.1577	0.3820	0.3684	0.1585
0.1693	0.3394	0.3352	0.1677
0.1888	0.2830	0.2853	0.1847
0.1920	0.2753	0.2686	0.1915
0.1776	0.3133	0.3096	0.1759
0.1976	0.2623	0.2514	0.1993
0.2061	0.2445	0.2313	0.2095

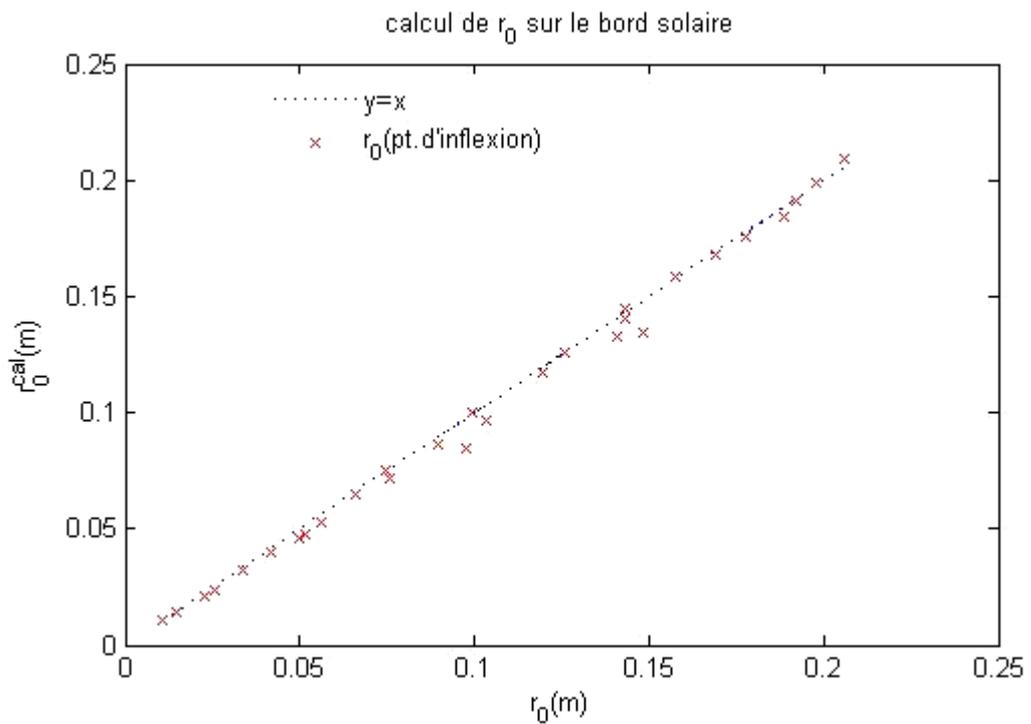
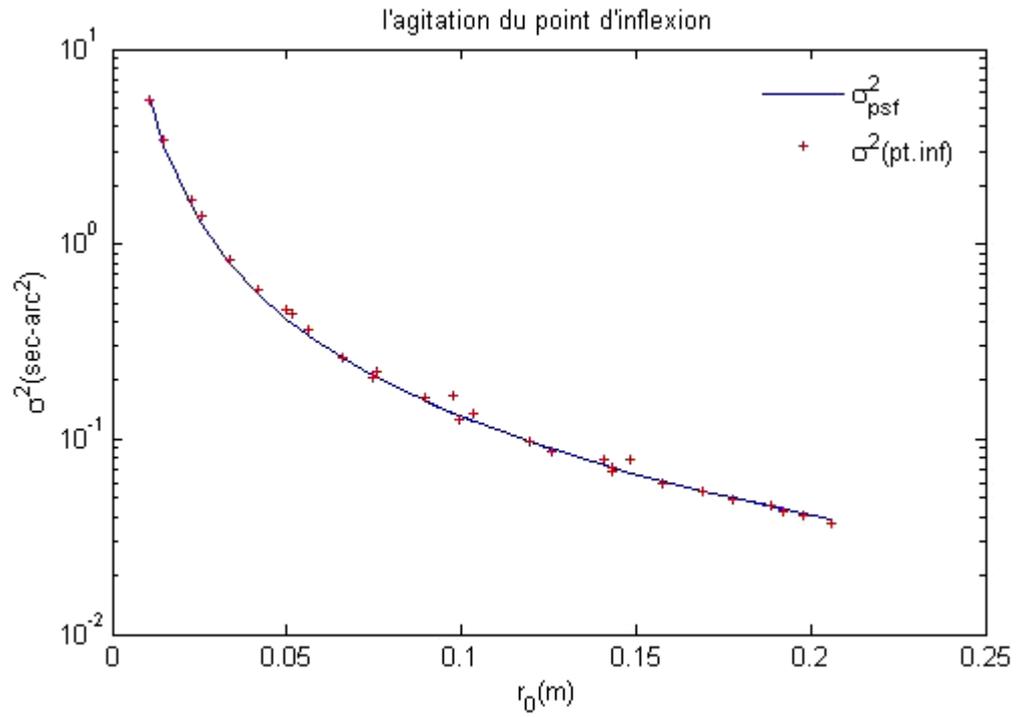


Figure (3.24) : (haut), figure donnant la variance du point d'inflexion en fonction de la turbulence donnée par le r_0 de la PSF, (bas) valeur de r_0 calculé à partir de la variance du pont d'inflexion et comparé à celui déduit de l'agitation sur la PSF.

- On remarque de cette figure que les variances obtenues par cette méthode sont plus proches des valeurs calculées sur la PSF.

Conclusion :

Cette méthode nous permet de retrouver l'agitation imposée par la turbulence, cela reste vrai dans le cas idéal, c'est-à-dire un bord non bruité, isoplanétique...etc., alors que le problème que peut poser cette méthode c'est que la localisation d'un seul point de l'image (comme le point d'inflexion) basée sur la dérivation du bord est très sensible au bruit.

L'expérience a montré que dans le traitement de signal, dériver un signal bruité ne fera qu'augmenter ce bruit, ce qui peut même engendrer la perte de toute l'information contenue dans ce signal. Chose qui nous ait amener à chercher une autre méthode qui ne repose pas sur le suivi d'un seul point mais d'un mouvement d'ensemble de points qui peuvent nous donner l'information recherchée. Naturellement on penserait au photocentre comme on l'a fait pour la figure de la PSF mais en calculant le photocentre de la dérivée du bord au lieu de celui du bord, car connaissant les propriétés du produit de convolution qui stipulent :

Si on définit deux fonctions F et G , le produit de convolution de ces deux fonction nous donne une fonction H tel que :

$$H = F \otimes G \quad (3.11)$$

Si on dérive la fonction H on a :

$$H' = F' \otimes G = F \otimes G' \quad (3.12)$$

Si F est une fonction échelon (Heaviside) dont la dérivée est la fonction de Dirac alors on écrit :

$$H' = F' \otimes G = \delta \otimes G \quad (3.13)$$

La fonction de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution donc on aura :

$$H' = G$$

En revenant maintenant au bord affecté par la turbulence $B(x)$, on a déjà établi que ce dernier est obtenu en faisant la convolution d'un bord non perturbé $I(x)$ avec la PSF:

$$B(x) = I(x) \otimes PSF(x) \quad (3.14)$$

où $I(x)$ c'est la fonction d'assombrissement centre bord.

dans cette méthode on considère que $I(x)$ est approximativement une fonction Heaviside donc on peut écrire :

$$B'(x) = \delta(x) \otimes PSF(x) = PSF(x)$$

Dans cette approximation la dérivée du bord perturbé donne directement la PSF et le calcul de l'agitation du photocentre de cette dérivée nous donne l'agitation de la PSF (Fluctuations de l'angle d'arrivée).

Etude statistique du photo- centre de la dérivée du bord :

Dans cette partie on prend la dérivée du bord perturbé (1dimension), sur laquelle on calcule le photocentre. Le problème pour cette méthode, à cause de la forme de la dérivée du bord, dont l'intensité à l'intérieur du bord est non nulle, nous oblige à faire un seuillage de la fonction pour calculer l'intégrale le long du bord qui détermine la position du photocentre, et comme on peut le remarquer sur la figure (3.25) la dérivée du bord est non symétrique par rapport au maximum, en plus, le seuillage va dépendre de l'intensité de chaque image ce qui n'est pas pratique en programmation. Alors pour une raison de simplification je fais un ajustement gaussien de la dérivée du bord, cela permet, non seulement de faire une symétrisation, mais aussi d'avoir directement le photocentre par les coefficients de la courbe d'ajustement, qui dans notre cas est une fonction composée de trois gaussiennes, c'est celle qui semble la mieux adaptée à la forme de la dérivée du bord figure (3.25). On peut ajuster la dérivée avec une seule gaussienne, mais dans ce cas là on prend en compte d'avantage, la partie étalée de la dérivée du bord qui est due à l'assombrissement, alors que dans le cas où on prend trois gaussiennes cet ajustement va séparer la partie étalée de la première gaussienne celle qui contient le maximum d'information sur la PSF. Donc c'est sur celle-ci qu'on calcule la position du photocentre.

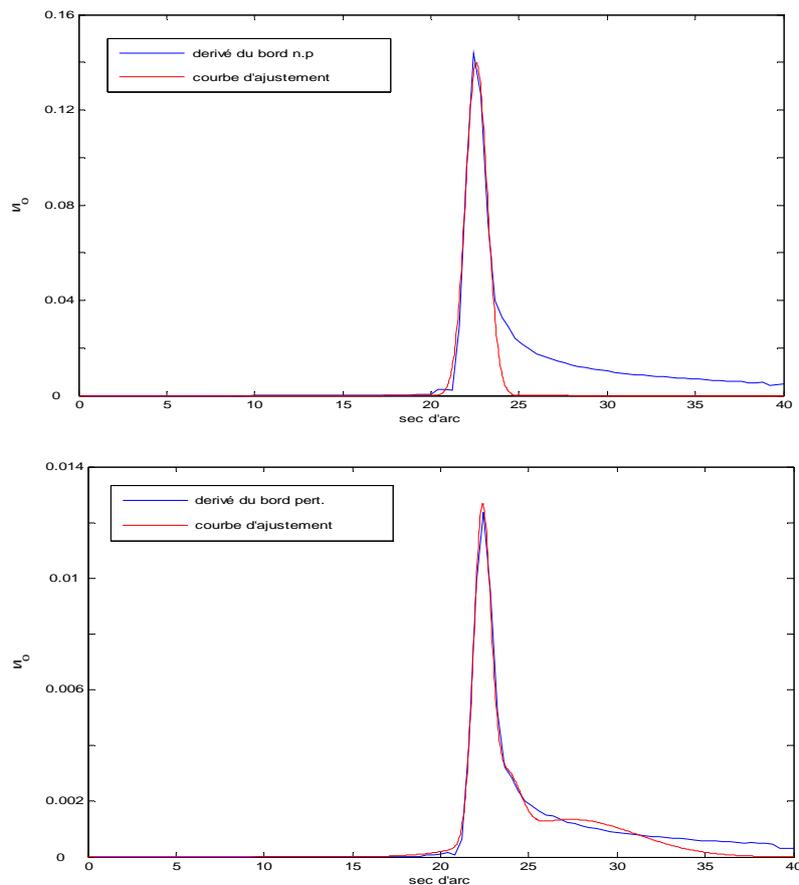


Figure (3.25) : avec l'approximation du bord à un heavyside, on suppose que la dérivée du bord nous donne la PSF.

On applique cette méthode pour différentes valeurs de r_0 , on note les résultats obtenus dans le tableau suivant :

$r_0^{psf} (m)$	$\sigma_{psf}^2 (pixel^2)$	$\sigma_{cal}^2 (pixel^2)$	$r_0^{cal} (m)$
148.8999	0.0044	149.2439	0.0044
35.8590	0.0104	38.1997	0.0100
20.0224	0.0146	23.0703	0.0134
9.7973	0.0225	10.9917	0.0210
7.8867	0.0256	9.5604	0.0229
4.9832	0.0338	6.2055	0.0296
3.5129	0.0417	3.8731	0.0392
2.5781	0.0501	3.0328	0.0454
2.4517	0.0516	3.0361	0.0454
2.1241	0.0563	2.5043	0.0510
1.6254	0.0662	2.0638	0.0573
1.3232	0.0748	1.6160	0.0664
1.2945	0.0758	1.7169	0.0641
0.8529	0.0974	1.2533	0.0773
0.9853	0.0894	1.3149	0.0751
0.7726	0.1034	1.1309	0.0823
0.8227	0.0995	0.9592	0.0908
0.5586	0.1256	0.7492	0.1052
0.6060	0.1196	0.9646	0.0905
0.4491	0.1432	0.6927	0.1103
0.4483	0.1433	0.5881	0.1217
0.4606	0.1409	0.8040	0.1010
0.4214	0.1486	0.5909	0.1214
0.3820	0.1577	0.5847	0.1222
0.3394	0.1693	0.5710	0.1239
0.2830	0.1888	0.5504	0.1267
0.2753	0.1920	0.3764	0.1591
0.3133	0.1776	0.5634	0.1250
0.2623	0.1976	0.4269	0.1475
0.2445	0.2061	0.4211	0.1487

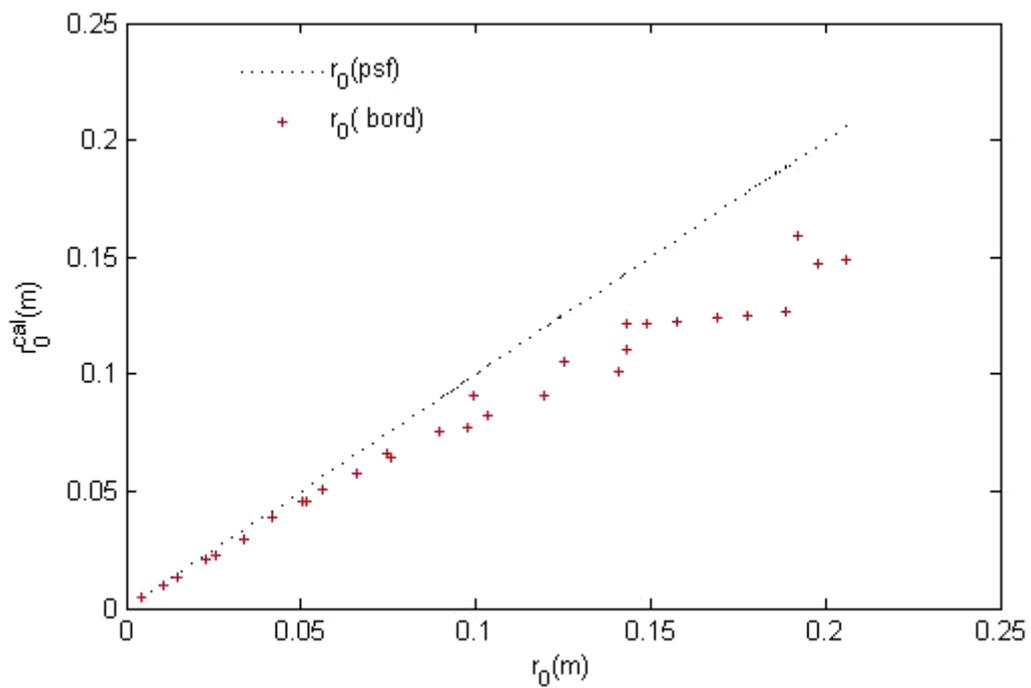
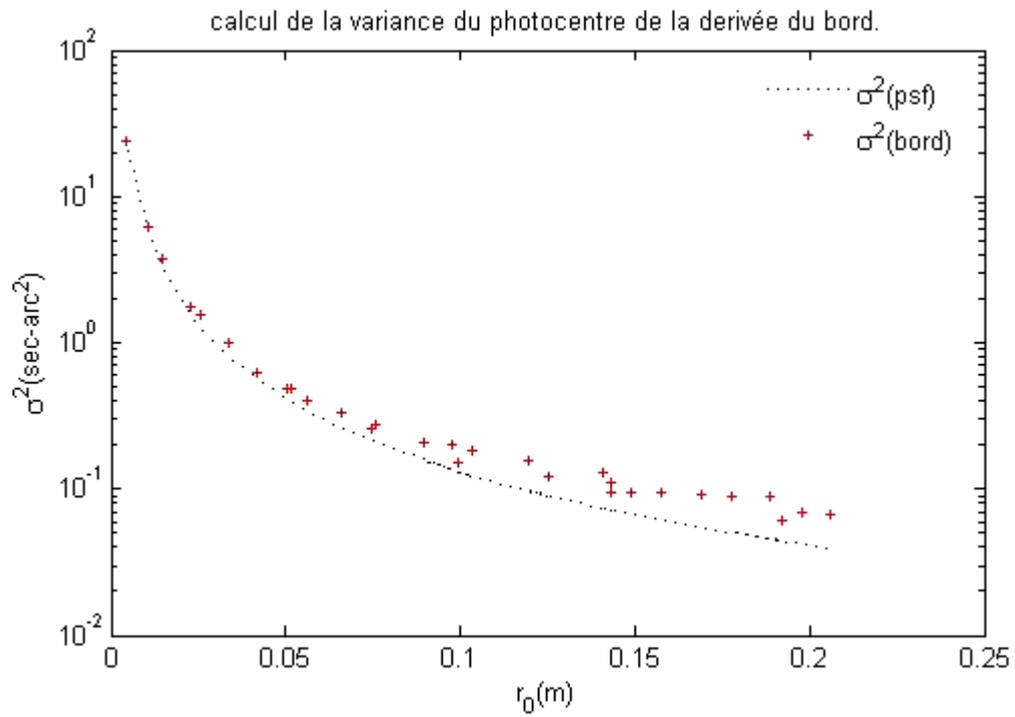


Figure (3.26) : valeurs de la variance des fluctuations du photocentre de la dérivée du bord en fonction de r_0 (haut) et les valeurs du paramètre de Fried calculé à partir de ces variances(bas).

- les résultats ainsi présentés dans la figure (3.26), montrent que pour une grande turbulence, l'agitation calculée à partir du mouvement du photocentre de la dérivée du bord, se rapproche assez bien de celle donnée par le mouvement de la PSF, alors que pour les faibles turbulences, on note un décalage qui se creuse à mesure que la valeur de r_0 augmente.

Conclusion :

On peut penser, à priori, que le décalage est dû au fait d'utiliser des ajustements (gaussiennes) sur les dérivées du bord, mais cela aurait affecté tous les bords et quelque soit la valeur de r_0 ; or comme on le voit ce n'est pas le cas, on peut le vérifier en utilisant d'autres ajustements ou ne pas utiliser du tout. Ceci par contre peut être expliqué par le fait d'approximer le bord solaire à un Heaviside. Ces résultats montrent qu'effectivement cette approximation reste valable, tant que la turbulence est assez importante pour masquer l'effet d'assombrissement que présente le bord solaire. Cela explique pourquoi l'agitation sur le bord est inférieure à celle retrouvée sur la PSF pour la même turbulence (lorsque r_0 est grand). Autrement dit pour les faibles turbulences, la dérivée du bord ne peut plus être approximée à la PSF mais à une fonction plus étendue figure (3.27).

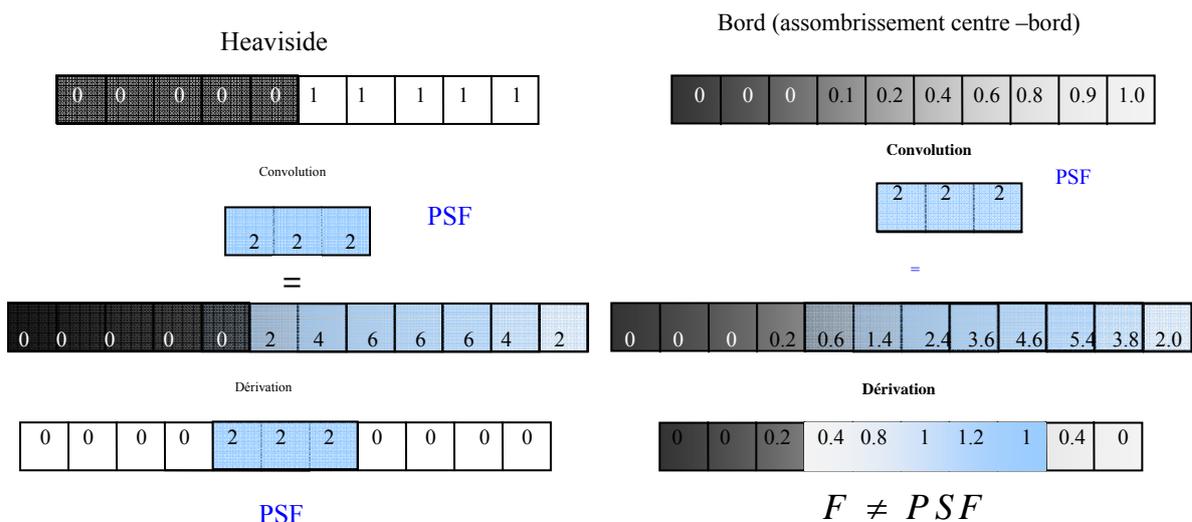


Figure (3,27) : Schéma illustrant le principe du produit de convolution pour une meilleure compréhension de ce qui se passe lors de la convolution de deux fonctions en particulier, fonctions d'intensité ou images qui sont : le bord solaire et la PSF auxquelles on a fait une dérivation comme le veut la méthode de calcul du photocentre. On montre aussi la convolution d'un Heaviside avec la même PSF afin de comparer les résultats.

Comme on peut le constater sur ce schéma : contrairement à un Heaviside la convolution d'un bord ayant un profil d'assombrissement par la PSF ne donne pas, après dérivation, la PSF mais une fonction F différente, plus étalée et dont l'intensité semble être atténuée, bien évidemment sous l'effet de l'assombrissement.

On a vu, bien que de manière qualitative, l'effet de l'assombrissement centre bord sur le filtrage introduit par la PSF (pupille- atmosphère), celle-ci va donc étaler plus le bord qu'un Heaviside. Si maintenant on considère l'anisoplanétisme, où chaque point du bord va être affecté par une PSF différente ceci va, bien entendu, accentuer cet effet.

Une fois connue, la raison pour laquelle l'agitation est sous estimée, dans le cas des faibles turbulences. On peut se poser la question sur la possibilité de corriger sur les images du bord perturbé cet effet, qui est l'assombrissement centre bord. Avant de répondre à cette question, dans la partie suivante, on rappelle quelques propriétés du produit de convolution utiles à notre étude.

3.5.5 Agitation du bord convolué (correction de l'assombrissement) :

Voici quelques rappels utiles sur le produit de convolution qu'on présente sans démonstration : Soient deux fonction F et G , le produit de convolution de ces deux fonction H est donné par :

$$H = F \otimes G = G \otimes F$$

Le produit de convolution est donc commutatif.

Si on considère le produit de convolution de trois fonction on a :

$$E \otimes (F \otimes G) = (E \otimes F) \otimes G$$

Le produit de convolution est associatif.

$$E \otimes (a.F + b.G) = a(E \otimes F) + b(E \otimes G)$$

C'est la propriété de la distribution sur l'addition et la linéarité.

$$F \otimes \delta = F$$

La fonction de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution et si on a :

$$F \otimes E = \delta$$

alors E est l'élément inverse par convolution de F .

La dérivée du produit de convolution : comme on l'a déjà rappelé dans le paragraphe (3.5.4) (équation(3.12)) est donnée par :

$$d(F \otimes G) = dF \otimes G = F \otimes dG$$

La transformée de Fourier : l'une des propriétés importantes du produit de convolution est sa transformée de Fourier, qui se présente en une simple multiplication de fonctions, ce qui simplifie beaucoup l'étude. D'ailleurs cette propriété est souvent utilisée dans les traitements de signal.

$$E = F \otimes G \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} \times \widehat{G} \quad (3.15)$$

avec $(\widehat{\quad})$ représente la transformée de Fourier. On note aussi que cela reste valable pour la transformée de Fourier inverse.

Nous allons voir dans cette partie comment on peut utiliser ces propriétés pour s'affranchir de l'effet d'assombrissement centre bord sur les images du bord affectées par la PSF pupille - atmosphère.

Le bord, non perturbé, par définition est une fonction d'intensité qu'on notera $I(x)$, (à une dimension) et dont le profil est donné par l'assombrissement centre bord. Le bord perturbé est obtenu par la convolution de cette fonction $I(x)$ par la PSF à une dimension, qu'on notera $P(x)$, on écrit alors :

$$B(x) = I(x) \otimes P(x)$$

Si on passe à la dérivée on obtient :

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} \otimes P(x) \neq P(x)$$

La dérivée de la fonction $I(x)$ est une fonction non symétrique et qui ne s'annule pas à cause de l'assombrissement centre bord. Le but de notre étude, dans cette partie, c'est de trouver une fonction de façon à obtenir, après convolution et dérivation, la fonction de Dirac. Si on note cette fonction $C(x)$ on écrit :

$$C(x) \otimes B(x) = C(x) \otimes (I(x) \otimes P(x)) \quad (3.16)$$

En utilisant l'associativité du produit de convolution on a :

$$C(x) \otimes B(x) = (C(x) \otimes I(x)) \otimes P(x)$$

$C(x)$ est choisi de manière à avoir :

$$C(x) \otimes I(x) = H.S \quad (\text{Heaviside})$$

en faisant la dérivation on aura :

$$\frac{d}{dx} [B(x) \otimes C(x)] = \frac{d}{dx} [I(x) \otimes C(x)] \otimes P(x) \quad (3.17)$$

sachant que la dérivée du Heaviside est la fonction de Dirac alors :

$$\frac{d}{dx} [B(x) \otimes C(x)] = \delta(x) \otimes P(x) = P(x) \quad (3.18)$$

Donc la dérivée du bord $B(x)$ convolué par la fonction $C(x)$ donne la PSF. Donc, calculer l'agitation sur le bord convolué, permet de retrouver l'agitation calculée sur la PSF. Maintenant pour déterminer la fonction $C(x)$ on passe à la transformée de Fourier tel que :

$$C(x) \otimes I(x) = H.S \Rightarrow \widehat{C}(f) \times \widehat{I}(f) = \widehat{H.S}(f)$$

donc :

$$\widehat{C}(f) = \widehat{H.S}(f) / \widehat{I}(f)$$

pour retrouver la fonction $C(x)$ il suffit de faire la transformée de Fourier inverse :

$$C(x) = TF^{-1} [(\widehat{H.S}(f)) / (\widehat{I}(f))] \quad (3.19)$$

De cette manière on a défini la fonction qui corrige l'effet d'assombrissement centre bord, qu'on applique sur les images perturbées utilisées dans la méthode précédente. Puis on compare les résultats obtenus.

Etude statistique du photo- centre de la dérivée du bord convolué :

En suivant la même méthode précédente, on calcule la variance des fluctuations du photocentre mais cette fois ci sur la dérivée du bord convolué qu'on note B_c :

$$B_c(x) = B(x) \otimes C(x) \quad (3.20)$$

Dans la simulation numérique, il faut attirer l'attention sur certaines précautions de programmation, en effet, dans MATLAB, la convolution numérique de signaux s'effectue à l'aide de la commande « conv. ». Cette fonction effectue la convolution discrète entre deux vecteurs d'entrée. Pour une utilisation correcte de cette commande il faut savoir que lorsque l'on effectue une convolution en pas d'échantillonnage discret, MATLAB, considère deux vecteurs d'indices $[1, n]$ et $[1, m]$ en entrée (1 pour dire un vecteur colonne de taille n , respectivement, m), et rend en sortie un vecteur d'indices $[1, m+n-1]$, donc pour garder la même dimension du vecteur d'entrée on est souvent appelé à tronquer le signal de sortie. Ceci requiert des précautions supplémentaires si on veut pas perdre les informations contenues dans ce signal. Ajouter à cela, la routine ne tient pas compte des positions respectives de ces trois signaux (entrée et sortie) sur l'axe des abscisses, d'où le décalage du signal après convolution, c'est à nous de déterminer la position du signal de sortie en examinant celui d'entrée.

Dans le cas particulier, d'une convolution de deux fonctions polynomiales, la convolution numérique de ces deux fonctions, revient à faire leur multiplication. En conséquence, la deconvolution de fonction polynomiale est donnée par la division de ces deux fonctions.

- Voici présentés les résultats obtenus dans le tableau suivant : on y trouve aussi à titre de comparaison ceux de la méthode précédente.

$\sigma_{psf}^2(\text{pixel}^2)$	r_0^{psf}	$\sigma_{bord}^2(\text{pixel}^2)$	r_0^{bord}	$\sigma_{b.comv}^2(\text{pixel}^2)$	$r_0^{b.comv}$
148.8999	0.0044	149.2439	0.0044	144.6970	0.0045
35.8590	0.0104	38.1997	0.0100	38.4553	0.0099
20.0224	0.0146	23.0703	0.0134	22.0441	0.0138
9.7973	0.0225	10.9917	0.0210	10.7061	0.0214
7.8867	0.0256	9.5604	0.0229	8.5027	0.0245
4.9832	0.0338	6.2055	0.0296	5.5600	0.0316
3.5129	0.0417	3.8731	0.0392	3.7618	0.0400
2.5781	0.0501	3.0328	0.0454	3.0035	0.0458
2.4517	0.0516	3.0361	0.0454	2.5914	0.0500
2.1241	0.0563	2.5043	0.0510	2.3632	0.0529
1.6254	0.0662	2.0638	0.0573	1.7264	0.0637
1.3232	0.0748	1.6160	0.0664	1.4303	0.0714
1.2945	0.0758	1.7169	0.0641	1.3703	0.0733
0.8529	0.0974	1.2533	0.0773	0.9147	0.0934
0.9853	0.0894	1.3149	0.0751	1.0915	0.0840
0.7726	0.1034	1.1309	0.0823	0.8619	0.0968
0.8227	0.0995	0.9592	0.0908	0.8681	0.0964
0.5586	0.1256	0.7492	0.1052	0.6011	0.1202
0.6060	0.1196	0.9646	0.0905	0.7509	0.1051
0.4491	0.1432	0.6927	0.1103	0.4816	0.1373
0.4483	0.1433	0.5881	0.1217	0.4850	0.1366
0.4606	0.1409	0.8040	0.1010	0.4961	0.1348
0.4214	0.1486	0.5909	0.1214	0.4515	0.1426
0.3820	0.1577	0.5847	0.1222	0.4116	0.1508
0.3394	0.1693	0.5710	0.1239	0.3665	0.1617
0.2830	0.1888	0.5504	0.1267	0.3062	0.1802
0.2753	0.1920	0.3764	0.1591	0.2960	0.1838
0.3133	0.1776	0.5634	0.1250	0.3390	0.1695
0.2623	0.1976	0.4269	0.1475	0.2828	0.1889
0.2445	0.2061	0.4211	0.1487	0.2660	0.1960

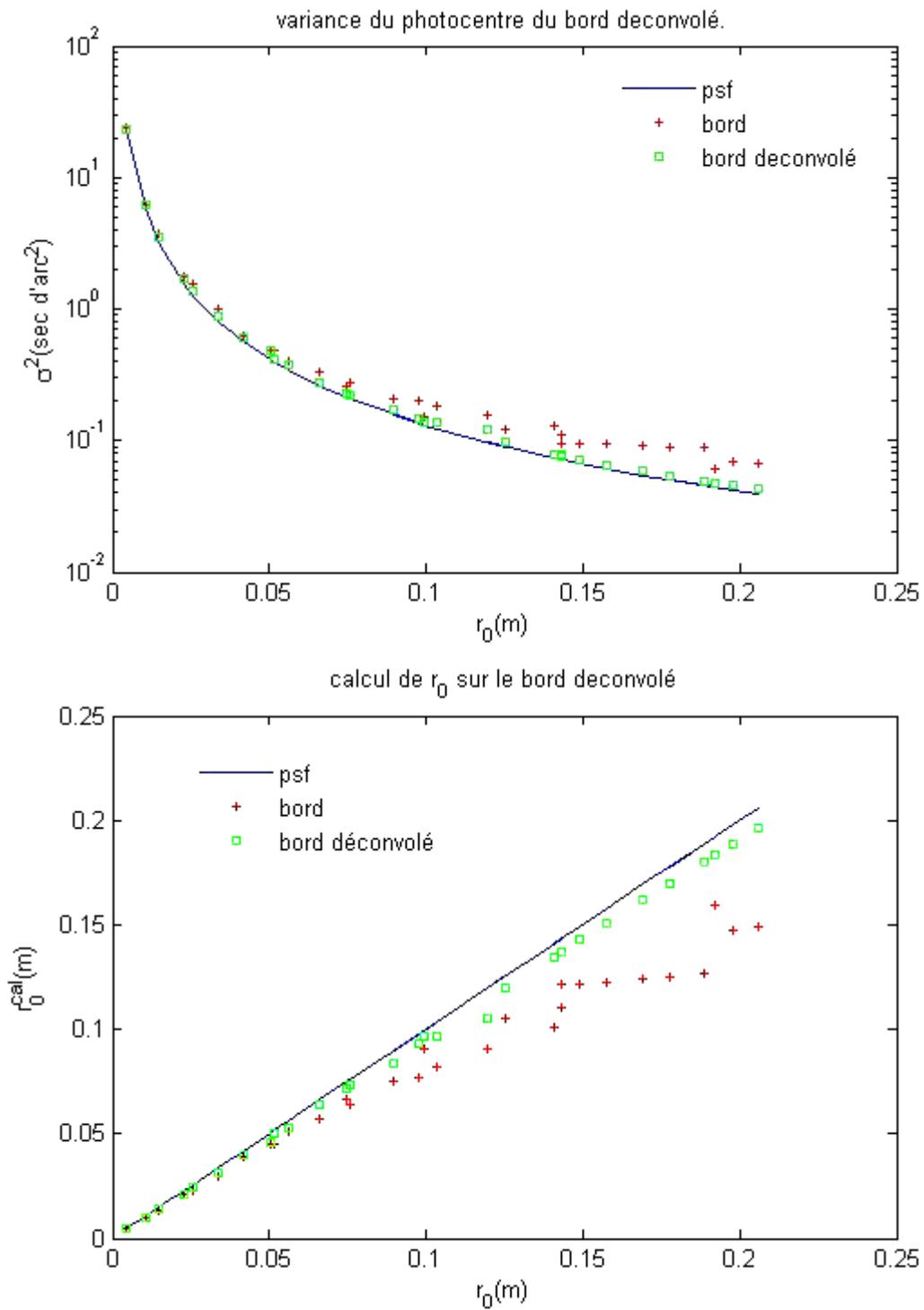


Figure (3,28) : (haut) représentation de la variance du photocentre calculé sur le bord avec et sans assombrissement centre bord pour chaque valeur de r_0 , (bas) : la valeur de r_0 calculée dans chaque cas en comparant avec celui calculé sur la PSF.

- On remarque que le décalage entre les variances calculées sur le bord et ceux de la PSF a disparu, et les valeurs de r_0 calculées par cette méthode coïncident assez bien avec celles données par l'agitation de la PSF.

Conclusion :

Ce résultat permet d'abord de vérifier qu'effectivement, l'assombrissement centre bord est responsable de la sous-estimation des variances sur le bord comparé à ceux de la PSF. Le deuxième point qui est un résultat important c'est que, en appliquant la méthode expliquée ci haut, on a pu corriger cet effet et retrouver toute l'information concernant la PSF contenue dans le bord perturbé, ceci se présente comme une sorte de deconvolution de l'effet d'assombrissement sur un bord solaire. En terme de programmation cela nous évite de faire une quelconque symétrisation de la dérivée du bord ou encore le seuillage.

Et pour finir on doit attirer l'attention sur le fait que cette deconvolution est indépendante de la PSF. Donc elle peut être utilisée quelque soit les conditions de turbulence. Ce qui est en soit un résultats très important car cela ouvre une voie sur l'exploitation des images du bord solaire pour caractériser la turbulence atmosphérique. Une voie qui a été souvent évitée à cause de l'effet d'assombrissement centre bord.

Dans cette partie de la simulation j'ai parlé du phénomène de l'agitation des images du bord solaire, et je suis arrivée à la conclusion sur ce qu'offre ce phénomène comme moyen pour remonter au caractère de la turbulence atmosphérique qui en est responsable. Nous allons dans ce qui suit, parler de l'autre effet causé par la turbulence sur des images du bord solaire mais en long temps de pose ce phénomène est l'étalement.

3.5.6 Calcul de l'étalement sur le bord :

Comme on la déjà expliqué dans le paragraphe (2.2.4), le phénomène d'étalement peut être utilisé pour remonter à la valeur de r_0 .

Donc dans la construction de l'image affectée par la PSF, si on considère que l'objet est une fonction Heaviside alors, la dérivée du bord convolué donne directement la PSF ; ce qui permet de déduire ses caractéristiques. Or on sait maintenant que cette approximation a ses limites alors on utilise, des images du bord avec et sans assombrissement centre bord.

La PSF en long temps de pose :

Tout d'abord il faut rappeler que l'étalement est un phénomène qui apparaît dans le cas d'image longue pose. Dans la simulation, Toujours pour vérifier la validité de cette méthode, on calcule d'abord l'étalement sur une source ponctuelle, autrement dit, sur la PSF dans le cas d'une image longue pose qu'on notera PSF_{lp} . Celle-ci sera schématiquement donnée par une accumulation d'un nombre fini de PSF instantanées. Donc, on génère une série d'images de ces PSF instantanées, 200 images, cela est suffisant pour avoir une distribution en intensité continue, où les structures fines propres à chaque speckle ont disparu, on obtient une seule image pour chaque valeur de r_0 , qui est la figure de la PSF_{lp} représentée sur la figure (3.29).

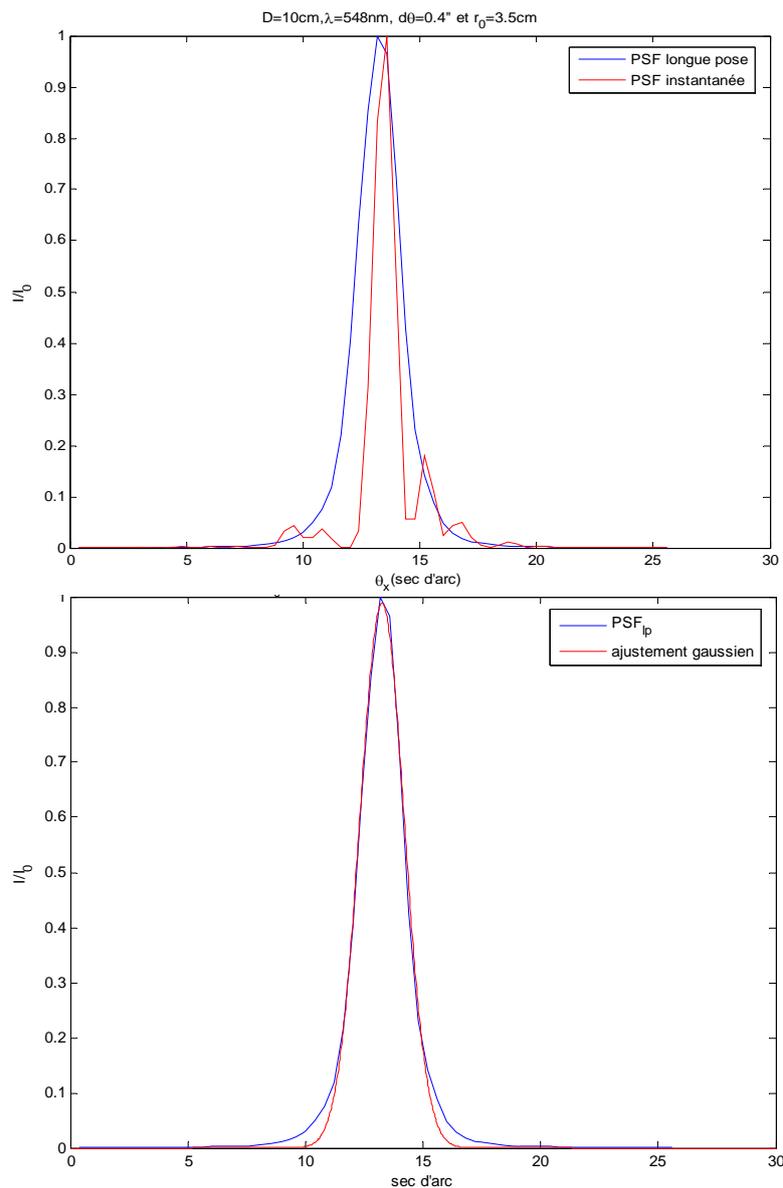


Figure (3.29) : Représentation d'une coupe de la PSF instantanée avec celle obtenue en longue pose (haut), ajustement de la PSF_{lp} par une gaussienne (en bas) comme on peut le constater la largeur à mi-hauteur de la courbe d'ajustement est la même que celle de la PSF_{lp} .

Le bord solaire en long temps de pose :

Sachant qu'on est toujours dans le cas isoplanétique et par analogie au cas d'une image du bord instantanée, on peut définir l'image d'un bord longue pose par un produit de convolution du bord non perturbé avec la réponse impulsionnelle longue pose (PSF_{lp}).

$$B_{lp}(x) = I(x) \otimes P_{lp}(x)$$

Comme pour l'agitation, on calcule l'étalement sur le bord en faisant la dérivée, on obtient une fonction dont la forme se rapproche de celle donnée par la PSF_{lp}. Dans les deux cas, avec et sans assombrissement centre bord. Puis on fait un ajustement gaussien comme présenté sur la figure (3.30).

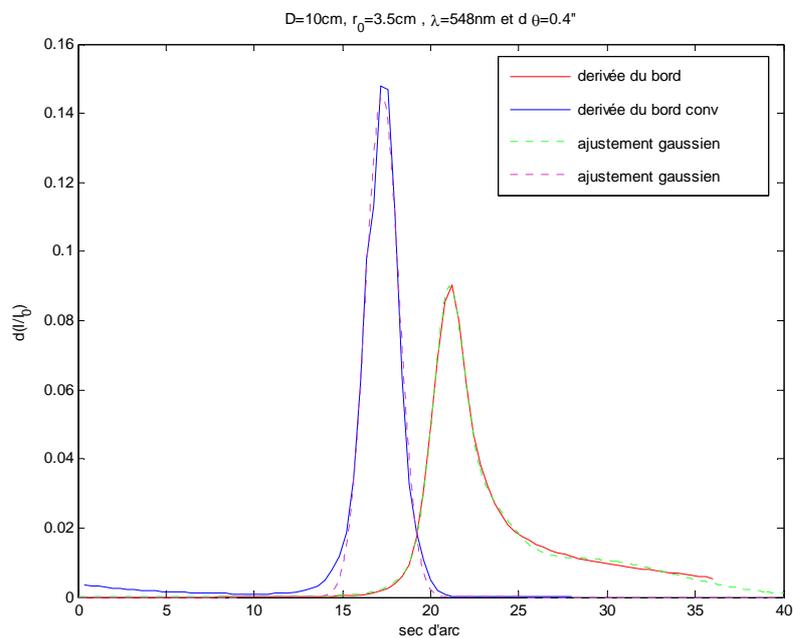


Figure (3.30) : représentation de la dérivée du bord obtenu en long temps de pose, dans les deux cas : avec (en rouge et ajustement gaussien en vert) et sans assombrissement centre bord (en bleu et son ajustement gaussien en violet).

On calcule la largeur à mi hauteur (FWHM). D'où l'intérêt d'utiliser des ajustements gaussiens. Sachant que la fonction de Gauss a la densité de probabilité qui obéit à la loi normale :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart type.

La FWHM (Full width at half maximum) est donné par l'expression suivante :

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2.3548\sigma$$

Relation entre FWHM et le paramètre de Fried :

Si on considère que l'échelle externe de la turbulence atmosphérique L_0 , est très grande devant les dimensions de la pupille $D \ll L_0$, la PSF longue pose va dépendre de la cohérence spatiale caractérisant la turbulence atmosphérique par son paramètre de Fried et de la taille de la pupille, si celle-ci est très grande devant r_0 de sorte que le nombre de structures fines formant la PSF instantanée $n=D/r_0$ soit grand, alors on peut dire dans ce cas là, que la forme de la PSF longue pose correspondante dépend uniquement de la turbulence. Ceci se traduit par l'obtention d'une tâche remplie et continue, de diamètre proportionnel à $1/r_0$ (les structures fines de diamètre proportionnel à $1/D$ ont complètement disparu). La largeur à mi hauteur de cette tâche est liée au paramètre de Fried, par la relation obtenue numériquement dans le model de Kolmogorov (équation(2.21)). C'est cette formule qu'on utilise pour déterminer le r_0 . Aussi on utilisera cette dernière, dans le calcul de la largeur à mi hauteur de la dérivée du bord longue pose, avec et sans assombrissement. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

r_0^{inj}	$fwHM^{psf} (")$	r_0^{psf}	$fwHM^{bord} (")$	r_0^{bord}	$fwHM^{b.conv} (")$	$r_0^{b.conv}$
0.0050	25.7807	0.0043	22.3315	0.0049	24.0360	0.0046
0.0100	11.1376	0.0099	14.8195	0.0074	11.7808	0.0094
0.0150	7.6004	0.0145	6.3569	0.0174	7.9903	0.0138
0.0200	5.1896	0.0213	8.6832	0.0127	5.3719	0.0205
0.0250	4.2018	0.0263	4.5508	0.0242	4.3221	0.0255
0.0300	3.8059	0.0290	7.8842	0.0140	3.8908	0.0284
0.0350	3.1343	0.0352	6.9168	0.0159	3.1706	0.0348
0.0400	2.8367	0.0389	3.2006	0.0345	2.8655	0.0385
0.0450	2.7655	0.0399	5.8726	0.0188	2.7958	0.0395
0.0500	2.5201	0.0438	5.7044	0.0193	2.5415	0.0434
0.0550	2.4612	0.0448	2.3862	0.0462	2.4750	0.0446
0.0600	2.2715	0.0486	2.2553	0.0489	2.2687	0.0486
0.0650	2.1661	0.0509	2.1578	0.0511	2.1602	0.0511
0.0700	2.0759	0.0531	2.0656	0.0534	2.0743	0.0532
0.0750	1.9786	0.0558	1.9786	0.0558	1.9549	0.0564
0.0800	1.9726	0.0559	1.9862	0.0555	1.9600	0.0563
0.0850	1.9695	0.0560	2.0035	0.0551	1.9479	0.0566
0.0900	1.8822	0.0586	1.9144	0.0576	1.8651	0.0591
0.0950	1.8437	0.0598	1.8926	0.0583	1.8193	0.0606
0.1000	1.8153	0.0608	1.8674	0.0591	1.7927	0.0615
0.1050	1.8083	0.0610	1.8589	0.0593	1.7861	0.0618

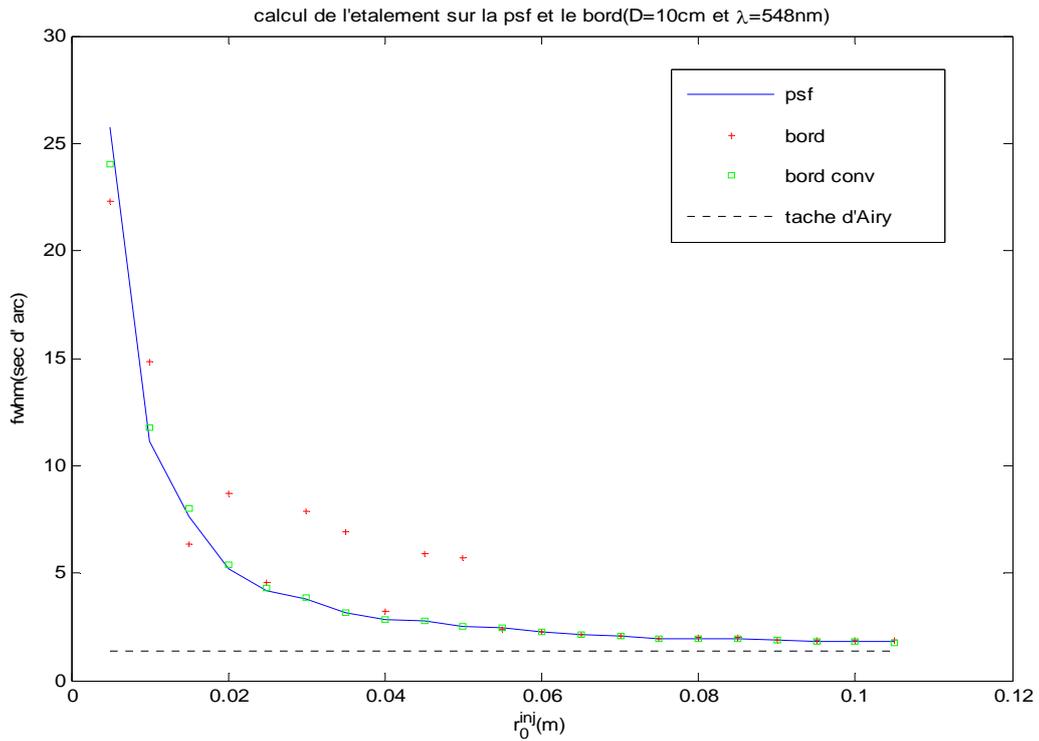


Figure (3.31) : représentation de la largeur à mi hauteur de la PSF_{lp} (bleu), sur la dérivée du bord longue pose avec assombrissement (rouge), sans assombrissement (vert) et celle de la tache d'Airy qui correspond au cas d'une absence totale de turbulence (noir pointillé).

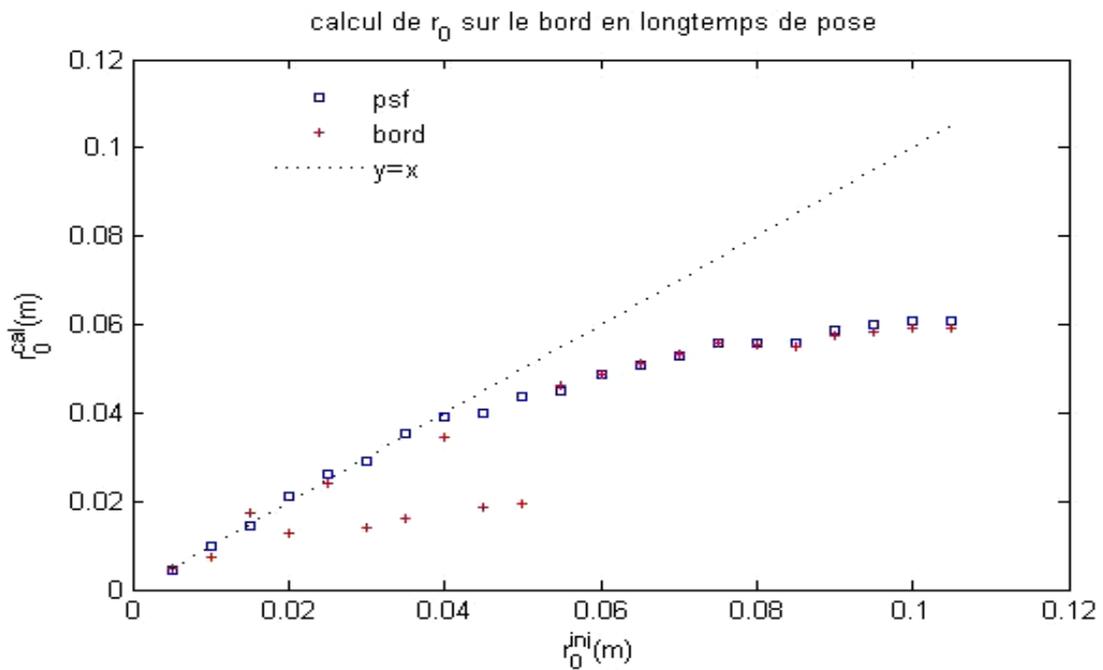


Figure (3.32) : calcul des valeurs de r_0 à partir de la FWHM sur la PSF_{lp} et la dérivée du bord longue pose et comparaison avec les valeurs de r_0 injectées dans le modèle (données par la droite $y=x$).

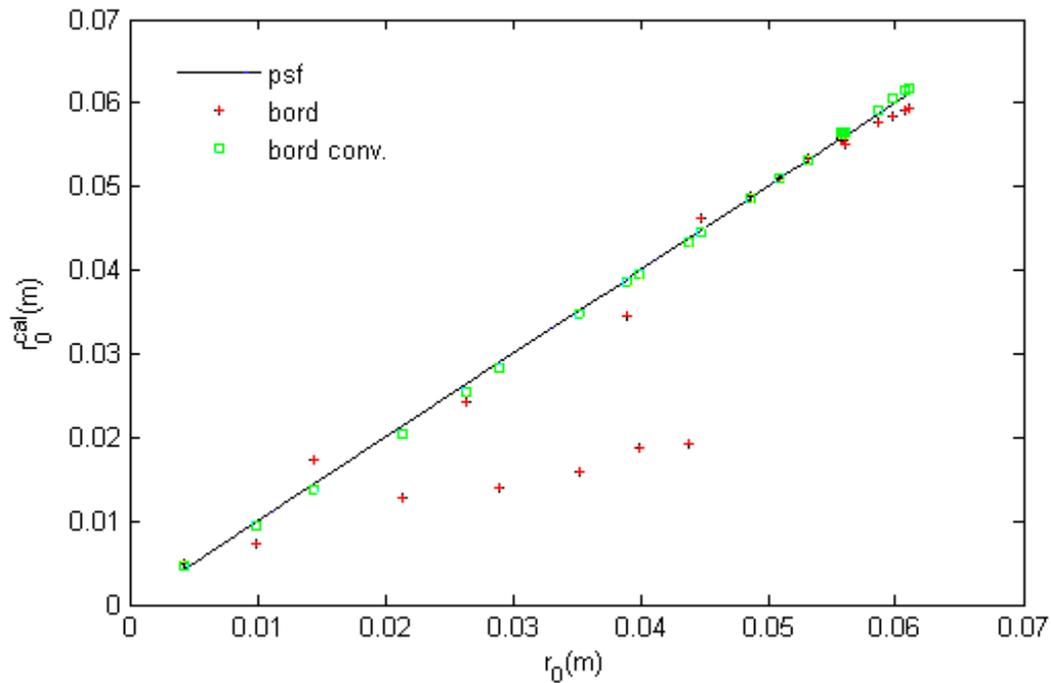


Figure (3.33) : représentation des valeur de r_0 calculé en fonction de celui donné par la FWHM de la PSF longue pose.

- La figure (3.31) et (3.32) montrent, que la FWHM calculée sur la PSF_{lp} et le r_0 qui en découle, correspond à la valeur injectée dans la simulation jusqu'à ce que cette valeur se rapproche de la taille du diamètre de la pupille où on note une saturation ce qui est prévu par la théorie où la FWHM est donnée dans ce cas limite par l'équation(2.22).
- Comme on peut le constater sur la figure (3.31) la FWHM calculée sur la PSF_{lp} tend à une valeur limite pour les faible turbulences cette limite correspond comme on peut le voir sur cette figure par la FWHM donnée d'une tache d'Airy. C'est la limite de résolution instrumentale dans le cas idéal (absence de turbulence optique) elle traduit le fait qu'à cause de la diffraction on ne peut avoir une image d'une source ponctuelle avec une taille plus petit à cette limite. D'où l'intérêt d'utiliser de grands télescopes.
- Dans la figure (3.33) où l'on compare entre les valeurs de r_0 calculé de l'étalement de la PSF_{lp} qu'on prend comme valeur référence et sur la dérivée du bord, on voit que calculé sur le bord, on obtient des valeurs très différentes par rapport à celle calculé sur la PSF par contre si on calcule l'étalement sur le bord corrigé de l'effet d'assombrissement et bien on retrouve exactement les valeurs obtenues de r_0 sur la PSF_{lp}

Conclusion:

Ces résultats nous mènent à dire, qu'effectivement, l'étalement du bord peut être utilisé pour remonter au paramètre chiffrant la turbulence optique. Cette méthode est limitée par la taille de la pupille, qui doit être très grande par rapport au paramètre de Fried r_0 . Mais on peut dire que ces résultats sont assez satisfaisants, en comparant la valeur de r_0 retrouvée sur le bord solaire, et celle calculée sur la PSF_{lp}. On a là une méthode qui semble être adéquate, tant qu'on respecte la condition de validité donnée par $D \gg r_0$. Il suffit donc, de prendre de grandes pupilles pour calculer les faibles turbulences.

3.5.7 Discussion et comparaison des méthodes :

Après avoir expliqué les différentes méthodes utilisées, dans le but de calculer le paramètre de Fried, j'ai présenté les résultats, dont j'ai discuté l'efficacité et aussi de la faiblesse. Je fais un récapitulatif de tout ce qui a été dit sur ces différentes méthodes, et fais une comparaison des résultats obtenus.

On a étudié en premier, le phénomène de l'agitation du bord solaire induit par la turbulence atmosphérique. En calculant les fluctuations du point d'inflexion on a montré que cela permet de retrouver la quantité de turbulence responsable de cette agitation. Mais cela reste vrai, seulement, dans le cas idéal où l'on ignore l'anisoplanétisme, le bruit, le polychromatisme...etc. J'ai proposé de calculer les fluctuations du photocentre de la dérivée du bord, qui a donné de bons résultats pour les fortes turbulences, mais dès que l'on atteint les moyennes, voir faibles turbulences, on perd considérablement de l'information sur l'agitation, qui est donnée par le photocentre de la PSF calculée à part. J'ai mis en évidence l'assombrissement centre bord, comme cause de ce décalage. Sachant modéliser l'effet d'assombrissement, qui n'est rien d'autre que, la fonction donnant le profil en intensité du bord non perturbé ; alors j'ai construit par convolution une fonction qui, appliquée à toute image perturbée, donne le cas idéal d'un bord solide (Heaviside) ; et ce quelque soit l'énergie de la turbulence optique, d'où l'efficacité de cette méthode. Ainsi, nous évitons de faire de quelconques symétrisations ou seuillage, auxquelles ont recours certaines méthodes faites dans ce sens là, mais qui n'ont pas été aussi tranchantes. Or les résultats obtenus dans ce cas là, sont assez satisfaisants. Ensuite je suis passée à l'étude de l'autre phénomène, affectant les images du bord en long temps de pose, l'étalement. Une étude qui s'avère très fructueuse, puisque elle permet de remonter au paramètre de Fried, même si cela reste limité au cas où $r_0 \ll D$. Malgré cela, rien ne nous empêche d'avoir une estimation correcte de la turbulence atmosphérique en longue pose.

Conclusion :

J'ai présenté dans les deux premiers chapitres de ce mémoire, consacrés à des définitions et rappels sur l'optique atmosphérique, la problématique de la formation de l'image à travers la turbulence atmosphérique, en particulier en astronomie et l'intérêt d'étudier le bord solaire. Ensuite dans le troisième chapitre je me suis attardée à étudier les deux principaux phénomènes, observés dans le plan image d'un télescope qui sont , l'agitation et l'étalement causés par la turbulence optique. La simulation fût notre principal outil pour extraire ses deux effets sur un bord synthétisé ; en utilisant plusieurs méthodes dont les résultats nous permettent de conclure, qu'effectivement ces deux effets, étudié séparément, nous offrent le moyen de remonter, au moins, à un des paramètres chiffrant la turbulence atmosphérique : c'est le paramètre de Fried. Alors les deux effets combinés, donnent deux équations dont l'une (l'étalement), dépend uniquement de r_0 et l'autre dépendant de r_0 et L_0 l'échelle externe de la turbulence atmosphérique (l'agitation où les fluctuations de l'angle d'arrivée). Donc la possibilité de déterminer un deuxième paramètre qui est L_0 , même si cela n'est pas l'objet de notre étude, reste faisable.

La simulation montre que ces effets sont difficiles à mettre en évidence à cause de l'assombrissement centre bord de l'intensité qu'il présente. Chose qu'on peut éviter si on prend un Heaviside comme objet. C'est la raison pour laquelle plusieurs méthodes expérimentales utilisent le bord lunaire pour étudier l'effet de la turbulence atmosphérique. Mais comme on l'a bien expliqué dans les premiers chapitres, la turbulence dépend énormément des variations de températures et du temps de l'observation, donc si on arrive à établir un profil de turbulence la nuit en utilisant une étoile (c'est le cas du DIMM) ou le bord lunaire, alors qu'en est il le jour, où le seul astre observable est le soleil. J'ai alors proposé une méthode qui permet de s'en affranchir en corrigeant de l'assombrissement. L'étude statistique de la position du bord solaire acquis avec de courts temps de pose et de son étalement obtenus avec des images en longs temps de pose, m'a permis d'obtenir la formulation d'une méthode d'estimation du paramètre de Fried. Cependant, plusieurs tentatives ont été faites pour contourner cette problématique qu'est l'assombrissement centre bord ; mais le résultat reste non convaincant. Alors j'ai proposé la méthode du bord convolué par une fonction que j'ai défini et qui a pour effet de corriger l'assombrissement. Une méthode qui a, non seulement, donné des résultats satisfaisants mais qui peut être utilisée sur des images réelles.

Perspectives :

*« La vie, c'est comme une
bicyclette, il faut avancer pour
ne pas perdre l'équilibre. »*

Albert Einstein.

Cette étude a été faite dans le cas le plus simple, or en se plaçant dans des cas plus réalistes, nous sommes obligés de prendre en compte plusieurs aspects, considérés jusque là, non existants tel que l'anisoplanétisme, le polychromatisme, le bruit thermique et photonique ainsi que l'évolution temporelle de la turbulence tous ces aspects, pouvant être modélisés et ajoutés comme contraintes ou filtrage. Ce qui constitue en gros, le cheminement des étapes à suivre après cette étude avant de passer à l'exploitation des images réelles du bord solaire, pour la détermination des paramètres caractérisants la turbulence atmosphérique. Enfin, cette méthode sera testée sur des images réelles du bord solaire obtenues au moyen de l'instrument MISolFA mis en place récemment (avril 2007) au plateau de Calern (Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, France).

Des développements de modèles de turbulence dans le cas d'interférométrie (multi télescope) à grandes bases sont prévus. Ceci rentre dans le cadre des techniques de la Haute Résolution Angulaire (HRA) qui prend une grande importance dans les projets des télescopes monolithiques de plus de 30 mètres (ELT). Ainsi l'extension de ces modèles aux grandes échelles, l'étude de l'évolution temporelle de la turbulence et le calcul de ses paramètres caractéristiques en utilisant, simultanément, les moniteurs de test des sites (GSM, DIMM.....) et les interféromètres (VLTI), permet d'établir des profils plus affinés de la turbulence atmosphérique et donc une optimisation des observations en HRA.

Bibliographie :

- [1]- Acker A., « Astronomie, Astrophysique, Introduction » cours, Dunod, Paris, (2005).
- [2]- Aime C.:” Shaped and apodized apertures for direct imaging of extra solar planets”,
Astronomy with High Contrast Imaging, EAS Publication Series, 12: 65-87(2004).
- [3]- Aime C.:” Teaching Astronomical Speckle Techniques”, submitted to European
Journal of Physics, (2000).
- [4]- Aristidi E. : « Reconstruction d’images astronomiques par analyse statistique du
champ de speckles au foyer d’un grand télescope », thèse de doctorat, Université de
Nice,(1992).
- [5]- Avila R., Ziad A., Borgnino J., Agabi A. and Tokovinin A.:” Theoretical
spatiotemporal analysis of angle-of-arrival induced by atmospheric turbulence as
observed with the grating scale monitor experiment “, J. Opt. Am. A / Vol. 14,
N11, (1997).
- [6]- Berdja A. : « Calcul du paramètre de Fried par la mesure de l’agitation relative de
l’image dédoublée d’une étoile », thèse de magister, (2002).
- [7]- Berdja A., Borgnino J. & Irbah I.: « Fresnel diffraction and polychromatic effects on
angle-of-arrival fluctuations », J. Opt. A: Pure Appl, Opt.8: (2006) 1-8.
- [8]- Borgnino J., Ceppatelli, G., Ricort, G., and Righini, A. : 1982. Astron. Astrophys. 107,
333.
- [9]- Borgnino J.: « Etude de la dégradation des images astronomiques diurnes par analyse
statistique des fluctuations d’angles d’arrivée. », thèse de doctorat (1978).
- [10]- Borgnino J: “Modelling the Optical Effects of Atmospheric Turbulence in High
Angular Resolution Astronomical Observations: Wavefront coherences and related
parameters”; 2004.
- [11]- Bouzid A, Irbah A., Borgnino J. and Lanteri H.:” Estimation of atmospheric
turbulence profiles from angle-of-arrival fluctuations observed on solar limb
images “.

- [12]- Chollet F. : « Observation du Soleil à l'Astrolabe », thèse de doctorat (1981).
- [13]- Conan R.: « Modélisation des effets de l'échelle externe de cohérence spatiale du front d'onde pour l'observation à Haute Résolution Angulaire en Astronomie. » thèse de doctorat (oct.2000).
- [14]- Coulman C.E. "Fundamental and applied aspects of astronomical seeing" Ann. Rev. Astron.astrophys.23, pp. 19-57, (1985).
- [15]- Djafer Djelloul: « Study and test of a solar astrolabe for Tamanrasset Observatory », thèse de magister, Univ. Blida (2002).
- [16]- Druesne P., Borgnino J., Martin F., Ricort G. & Aime C.: "Speckle interferometric study of the solar granulation from centre to limb", Astron. Astrophys., (1989) 217: 229-236.
- [17]- Emilio M., Kuhn J.R., Bush R.I. and Scherrer P.: "On the constancy of the solar diameter", The Astrophysical Journal, 543:1007-1010, (2000).
- [18]- Favre A., Kovaszny I.S.G, Dumas R., Gaviglio J. et Coantic M: « la turbulence en mécanique des fluides. », Bordas, Paris, (1976) pp: 2-16; 80-111; 124-129; 300-314; 354-360.
- [19]- Frederick G Smith: "Infrared and Electro-Optical Systems Handbook", Vol. 2 "Atmospheric Propagation of Radiation"; 1993
- [20]- Fried D. L.: « Anisoplanatism in adaptive optics », J. Opt. Soc. Am. /Vol. 72, No. 1(January 1982).
- [21]- Fried D.L. : "Optical Resolution Through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures", Reprinted from Journal of the Optical Society of America, Vol. 56(10),1372-1379, (October 1966).
- [22]- Goodman J.W. : « Introduction à l'Optique de Fourier et à l'Holographie », Masson et C^{ie}, éditeurs, (1972).
- [23]- Gough D.O.: "How is solar activity influencing the structure of the sun", Proc. SOHO 11 Symposium, Davos, Switzerland, 11-15 March 2002.
- [24]- Hestroffer D. & Magnan C. : "Wavelength dependency of the Solar limb darkening", Astron. Astrophys., 333: 338-342 (1998).
- [25]- Hill H.A., Stebbens R.T. and Olson J.R.: "The finite Fourier Transform definition of an edge on the solar disk", The Astrophysical Journal, 200: 484-498, 1975 .

- [26]- Irbah A. Bouzid A., Lakhil L., Sagouani N., Borgnino J., Delmas C. and Laclare F.:
 ” Atmospheric turbulence and solar diameter measurement”.
- [27]- Irbah A. : « Estimation des paramètres de qualification de la turbulence pour des observations de jour », rapport (Janv.2000).
- [28]- Irbah A., Assus P., Berdja A., Borgnino J., Fodil M., Morand F. et Saidi M.Y. : « Microsatellite PICARD, MISolFA : un moniteur de qualité d’images solaires utile à la mission PICARD », rapport de projet, CNRS service d’Aéronomie, (2004).
- [29]- Irbah A., Bouzaria M., Lakhil L., Moussaoui R., Borgnino J., Laclare F. & Delmas C. : “Feature extraction from solar images using wavelet transform : Image cleaning for applications to solar astrolabe experiment”, Solar Physics 185:255-273, (1999).
- [30]- Kolmogorov A.N (1941): “Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds number”; comptes rendus de l’Academie des sciences de l’U.R.S.S. 31, 301-305.
- [31]- Kolmogorov, A. N (1962): “A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number “, Journal of Fluid Mechanics 13, 82-85.
- [32]- Kuhn J.R., Bush R.I., Scheick X. & Scherrer P.:” The Sun’s shape and brightness”, Nature, Vol. 392: (12 March 1998).
- [33]- Laclare F., Delmas C., Coin J.P. & Irbah A.:1996, Sol. Phys., 166-211.
- [34]- Lamraoui F. : « Estimation des paramètres de cohérence spatio - angulaire par analyse statistique des fluctuations d’angle d’arrivée observées au bord du soleil », mémoire de stage de DEA, (2001)
- [35]- Léna P., Blanchard A. : « Lumières, une Introduction aux phénomènes optiques », Inter- Editions, Paris, (1990).
- [36]- Monin A. S. and Yaglom, A. M. (1971), “Statistical fluid mechanics, mechanics of turbulence, Vol. 2, MIT Press, Cambridge, Mass.
- [37]- Nakajima T.,” Signal-to-noise ratio of the bispectral analysis of speckle interferometry”, J. Opt. Soc. Am. A.5: 963-985 (1988).
- [38]- Neckel H. & Labs D.:” Solar limb darkening 1986-1990, ($\lambda=303$ to 1099 nm)”, Solar Physics 153:91-114,(1994).
- [39]- Neckel H.:” Analytical reference functions $F(\lambda)$ for the sun’s limb darkening and its absolute continuum intensities ($\lambda=300$ to 1100 nm)”, Solar Physics (2005), 229: 13-33.

- [40]- Neckel H.:” The Solar Radius derived from limb-darkening scans obtained in 1981 and from 1986 to1990”, Solar Physics 156:7-16,(1995).
- [41]- Noël F. 1997, A&A, 325-825.
- [42]- Noël F.: ” On Solar Radius variations observed with Astrolabes”, Solar Physics (2005) 232:127-141.
- [43]- Parker E.N.: « The Enigma of Solar Activity », Basic Mechanics of Solar Activity, 3-16, edited by Bumba and Kleczek, (1976).
- [44]- Perez José-Philippe: « Optique géométrique et ondulatoire », Edition 4, Masson, Paris (1994).
- [45] - Pierre Lantos: « Le Soleil en face, le Soleil et les relations Soleil- terre », Masson, Paris (1997).
- [46]- Rocca A., Roddier F. & Vernin J. : “Detection of Atmospheric Turbulent layers By Spatiotemporal and Spatioangular Correlation Measurements of Stellar light Scintillation”, J. Opt. Soc. Am. A 64,pp. 1000-1004, (1974).
- [47]- Roddier F.: « les effets de la turbulence atmosphérique sur la formation des images visibles et infrarouges », J. Optics (Paris) 10, pp.299-303, (1979).
- [48]- Roddier F.: “The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy”, E. Zolf, Progress in optics 19, North Holland, Amsterdam, (1981).
- [49]- Roggmann M.C., Welsh B. :“Imaging through turbulence“, CRC Press LLC (1996)
- [50]- Sarazin M., Roddier F. :” The ESO Differential Image Motion Monitor”, Astron. Astrophys. 227: 294-700, (1990).
- [51] - Sarazin M.: “Site atmospheric characterization” AO'95: Adaptive Optics Topical Meeting, Garching, October 2-6, 1995, M. Cullum-ESO Ed.
- [52]- Tatarskii V. I.:” the effects of the turbulent atmosphere on wave propagation” (1971).

- [53]- Thierry Fusco : « Correction partielle et anisoplanétisme en Optique Adaptative : traitement à posteriori et Optique Adaptative multiconjuguée » PUB 2000-2.
- [54] - Thuillier G., Sofia S. and Haberreiter M.:” Past, present and future measurements of the solar diameter”, COSPAR. Published by Elsevier, Advances in Space Research 35 (2005), 329-340.
- [55]- Vernin J., Benkhaldoun Z. & Tunon M.: “Astronomical site evaluation in the visible and radio range”, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 266,2000.
- [56]- Vigouroux A. : «Etude de la variabilité solaire à long terme », Thèse de doctorat (observatoire de Nice sept96).
- [57]- Voitsekhovich V.V.:”Outer scale of turbulence: comparison of different models”, J. Opt. Soc. Am. A. /Vol. 12, No. 6, (1995).
- [58]- Ziad A.: « estimation des échelles limites de cohérence spatiale des fronts d’onde et optimisation des observations à haute résolution angulaire en astronomie », thèse de doctorat (octobre 1993).

Annexe :

Rappels sur la diffraction :

- L'équation d'Helmetz :

$$(\nabla^2 + k^2) U = 0 \quad \text{avec } U(P,t) = |U(P,t)| \exp[-j\varphi(P)]. \quad (1)$$

Représente l'amplitude complexe d'une onde monochromatique à un point P et à l'instant t , $\varphi(P) = 2\pi\nu t$ la phase $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$, toute perturbation optique monochromatique qui se propage dans l'espace libre doit obéir à cette équation.

- Le théorème de Green :

$$\iint_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) = \iint_S (G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n}) ds.$$

c'est le fondement essentiel de la théorie scalaire de la diffraction.

- Le théorème intégral de Helmetz- Kirchhof : si on prend un point P_0 et S une surface fermée arbitraire entourant P_0 , la valeur de G en un point arbitraire P_1 est donnée pour une onde sphérique d'amplitude unité se propageant du point P_0 vers P_1 par :

$$G(P_1) = \exp(jkr_{01})/r_{01} \quad (2)$$

qui doit donc obéir à l'équation

$$(\nabla^2 + k^2) G = 0.$$

Si on applique la formule de Green on aura :

$$U(P_0) = (1/4\pi) \iint_{\Sigma} (G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n}) ds \quad (3)$$

Σ : surface d'une ouverture dans un plan opaque ou un écran équivalent.

- Principe de Huygens- Fresnel : si on se met dans le cas où la distance r_{01} de l'ouverture au point d'observation est plus grande que la longueur d'onde ($r_{01} \gg \lambda$) on aura comme approximation :

$$U(P_0) = (1/4\pi) \iint_{\Sigma} (\exp(jkr_{01})/r_{01}) (\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{01})) ds \quad (4)$$

en supposant que l'ouverture est éclairée par l'onde sphérique d'expression :

$$U(P_1) = A \exp(jkr_{21})/r_{21}$$

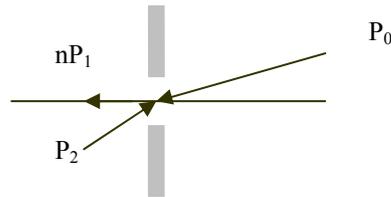
provenant d'un point source situé en P_2 à la distance r_{21} du point P_1 , si $r_{21} \gg \lambda$ alors on peut écrire :

$$U(P_0) = (A/j\lambda) \iint_{\Sigma} [\exp(jk(r_{01}+r_{21})/r_{01}+r_{21})] [(\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{01}) - \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{21}))/2] ds \quad (5)$$

c'est la formule de Fresnel – Kirchhoff qu'on peut écrire sous forme:

$$U(P_0) = (A/j\lambda) \iint_{\Sigma} U'(P_1) \cdot (\exp(jkr_{01})/r_{01}) ds \quad (6)$$

$$U'(P_1) = (1/j\lambda) [A (\exp(jkr_{21})/r_{21})] [(\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{01}) - \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{21}))/2]$$



C'est le principe de Huygens. On peut alors, interpréter ces expressions, en disant que le champ produit en P_0 provient d'une infinité de sources ponctuelles « secondaires », fictives situées sur l'ouverture même, en prend, par raison de simplification le facteur d'obliquité $\frac{1}{2}(\cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{01}) - \cos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{21}))$ égale à 1.

Pour la suite il est important de se rendre compte que le principe de Huygens – Fresnel exprimer par cette équation n'est rien d'autre en réalité qu'une intégrale de superposition, pour préciser ce point de vue, nous pouvons réécrire l'équation sous la forme :

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} h(P_0, P_1) U(P_1) ds \quad (7)$$

Avec $h(P_0, P_1) = (1/j\lambda) (\exp(jkr_{01})/r_{01})$, la fonction de pondération.

➤ Approximation de Fraunhofer :

Si en reprend l'équation (3.21) qui donne l'amplitude de l'onde diffractée sur le plan image au point $P_0(x_0, y_0)$ s'écrit donc :

$$U(x_0, y_0) = \iint_{\Sigma} h(x_0, x_1, y_0, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (8)$$

$$h(x_0, x_1, y_0, y_1) = (1/j\lambda) (\exp(jkr_{01})/r_{01})$$

Comme $U(x_1, y_1)$ est identiquement nulle en dehors de l'ouverture Σ on pourra intégrer à l'infini:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x_0, x_1, y_0, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (9)$$

Les approximations seront donc fondées sur l'hypothèse que l'on se situ très loin par rapport à l'objet observé, si l'on considère la propagation se faisant dans la direction des z

croissants cela revient à dire que z doit être très grands devant la dimension de l'ouverture Σ alors, on va confondre r_{01} avec z tel que :

$$h(x_0, x_1, y_0, y_1) = (1/j\lambda) (\exp(jkr_{01}))/z .$$

on remarque que la valeur de r_{01} dans l'exposant ne peut être simplement remplacée par z car les erreurs seront multiplier par un grand nombre k .

si on écrit :

$$\begin{aligned} r_{01} &= [z^2 + (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2]^{1/2} \\ &= z [1 + ((x_0-x_1)/z)^2 + ((y_0-y_1)/z)^2]^{1/2} \end{aligned}$$

qu'on développe sous forme : $(1+b)^{1/2} = 1 + b/2 - b^2/8 + \dots$

on aura

$$r_{01} = z [1 + 1/2((x_0-x_1)/z)^2 + 1/2((y_0-y_1)/z)^2].$$

Avec la condition restrictive sur le changement de z pour que la phase maximale soit inférieur à 1 rad tel que $z \gg \frac{1}{2} k(x_1^2 + y_1^2)_{\max}$ on a établi l'approximation de Fraunhofer se qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U(x_0, y_0) &= (\exp.jkz) \exp.[j(k/2z)(x_0^2 + y_0^2)] \\ &\cdot \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) \exp.[-j(2\pi/\lambda z)(x_0x_1 + y_0y_1)] dx_1 dy_1. \end{aligned}$$

Pour les ondes lumineuses, les conditions exigées dans cette approximation, et qui est donnée par Fraunhofer, donne pour une longueur d'onde de 6000\AA (rouge) et une ouverture de largeur 2,5 cm , une distance d'observation z qui doit satisfaire à $z \gg 1600\text{m}$, néanmoins, ces conditions sont remplies dans le cas des observations astronomiques .

➤ Le passage au spectre angulaire (Transformations de Fourier) :

On peut aussi formuler la théorie scalaire de diffraction sous une forme qui ressemble beaucoup à la théorie des filtres linéaires .comme nous le verrons , si on effectue la transformation de Fourier sur la distribution du champ complexe dans un plan quelconque, (XY) par exemple, on aura pour une source monochromatique l'amplitude complexe ,qui se propage dans la direction des z croissant $U(x,y,0)$, nous allons calculer le champ résultant $U(x,y,z)$ qui apparaît en un second point P_0 de coordonnées (x,y,z) . Dans le plan XY la fonction U possède une transformée de Fourier « bidimensionnelle » définie par :

$$A_0(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,0) \exp [-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy.$$

Et donc la transformation inverse nous donne :

$$U(x,y,0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A_0(f_x, f_y) \exp [j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y$$

Or on sait que l'amplitude complexe d'une onde plane d'amplitude unité se propageant dans une direction des cosinus directeurs (α, β, γ) s'écrit :

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = \exp[j(2\pi/\lambda)(x\alpha + y\beta + z\gamma)] ; \gamma = (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$$

Donc l'expression $\exp [j2\pi(f_x x + f_y y)]$ peut être considérée dans le plan $z=0$, comme l'expression d'une onde plane se propageant dans la direction des cosinus directeurs :

$$\alpha = \lambda f_x, \beta = \lambda f_y \text{ et } \gamma = (1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2)^{1/2}$$

où f_x, f_y représentent les fréquences angulaires (ont la dimension inverse d'un angle donné par rad^{-1}). La fonction $A_0(f_x, f_y)$ est appelée spectre angulaire de la perturbation .

- Un système linéaire : pour lequel les grandeurs de sortie sont reliées à ceux de l'entrée par une relation exprimée en intégrale (9) dite de superposition où h sera dans le cas où l'entrée du système est une fonction delta, la réponse impulsionnelle du système. Les systèmes optiques sont des systèmes linéaires et invariants dans l'espace, si l'on considère l'isoplanétisme, l'expression (9) devient dans ce cas là :

$$U(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x_0 - x_1, y_0 - y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (10)$$

Qui est connue sous le nom du produit convolutif.

- Le produit de convolution et la corrélation : de deux fonctions h et g en générale sont définis par :

$$g \otimes h = \int d\tau g(t - \tau) h(\tau) \quad (11)$$

et

$$\text{corr}(g, h) = \int d\tau g(t + \tau) h(\tau) \quad (12)$$

Le théorème de Convolution et de corrélation : la convolution de deux fonctions est équivalente au produit de leurs transformées de Fourier :

$$g \otimes h \Leftrightarrow G(f)H(f) \quad \text{et} \quad \text{corr}(g, h) \Leftrightarrow G(f)H^*(f) \quad (13)$$